

Partiële differentiatie

Jeroen Vermeulen

Inhoudsopgave

1	Wat is het concept?	5
2	Voorbeeld	5
3	Waarom is dit belangrijk?	5
4	Rekenregels voor partiële afgeleiden	6
4.1	Lineariteit	6
4.2	Productregel	6
4.3	Quotiëntregel	7
4.4	Kettingregel	7
4.5	Gemengde partiële afgeleiden	8
4.6	Samenvatting van de rekenregels	8
4.7	Oefening	9
4.8	Oplossing van de oefening	9
5	Bewijs van de rekenregels voor partiële afgeleiden	9
5.1	Bewijs van de lineariteit	9
5.2	Bewijs van de productregel	10
5.3	Bewijs van de quotiëntregel	10
5.4	Bewijs van de kettingregel	11
5.5	Gelijkheid van gemengde partiële afgeleiden	12
5.6	Besluit	12
6	Resttermen en differentieerbaarheid	12
6.1	Lineaire benadering van een functie	12
6.2	Eigenschap van de restterm	13
6.3	Geometrische interpretatie	13
6.4	Voorbeeld	13
6.5	Resttermen en Taylorontwikkeling	14
6.6	Waarom resttermen belangrijk zijn	14
6.7	Samenvatting	14
7	De totale differentiaal	15
7.1	Definitie	15
7.2	Interpretatie	15
7.3	Voorbeeld	15
7.4	Totale differentiaal van functies met meerdere variabelen	16
7.5	Toepassing: benadering van functiewaarden	16
7.6	Relatie met de gradient	16
7.7	Belang van de totale differentiaal	17
8	De gradiënt	17
8.1	Definitie	17
8.2	Relatie met de totale differentiaal	17
8.3	Geometrische interpretatie	18
8.4	Voorbeeld	18
8.5	Relatie met de richtingsafgeleide	18
8.6	De nabla-operator	18
8.7	Belang van de gradiënt	19

9 Richtingsafgeleiden en maximale stijgingsrichting	19
9.1 Definitie van de richtingsafgeleide	19
9.2 Interpretatie	19
9.3 Relatie met de gradient	20
9.4 Maximale stijgingsrichting	20
9.5 Geometrische betekenis	21
9.6 Voorbeeld	21
9.7 Samenvatting	21
10 Een terugblik op de kettingregel	22
11 Richtingsvectoren en niveauverzamelingen	24
11.1 Richtingsvectoren	25
11.2 Beweging in een gegeven richting	25
11.3 Niveauverzamelingen	26
11.4 Niveaucurven	26
11.5 Niveauoppervlakken	27
11.6 Relatie met de gradiënt	27
11.7 Geometrische interpretatie	28
11.8 Voorbeeld	28
11.9 Belang van niveauverzamelingen	28
12 Taylorontwikkeling in meerdere variabelen	29
12.1 Herinnering: lineaire benadering	29
12.2 Taylorontwikkeling van tweede orde	29
12.3 De Hessiaan	30
12.4 Interpretatie van de verschillende termen	30
12.5 Voorbeeld	31
12.6 Algemene Taylorontwikkeling	31
12.7 Belang van de Taylorontwikkeling	32
13 De Hessiaan	32
13.1 Definitie	32
13.2 Symmetrie van de Hessiaan	33
13.3 Relatie met de Taylorontwikkeling	33
13.4 Geometrische interpretatie	33
13.5 Voorbeeld	33
13.6 Voorbeeld met gemengde afgeleiden	34
13.7 Hessiaan en kromming van functies	34
13.8 Belang van de Hessiaan	34
14 Kritieke punten en optimalisatie	35
14.1 Lokale maxima en minima	35
14.2 Kritieke punten	35
14.3 Noodzakelijke voorwaarde voor extrema	36
14.4 Classificatie van kritieke punten	36
14.5 Interpretatie via de Taylorontwikkeling	36
14.6 Voorbeeld: lokaal minimum	37
14.7 Voorbeeld: zadelpunt	37
14.8 Procedure voor het oplossen van optimalisatieproblemen	38
14.9 Belang van optimalisatie	38

Samenvatting

Dit document behandelt de basisprincipes van partiële differentiatie, waarbij we dieper ingaan op de definitie, de gangbare notatie en de belangrijkste eigenschappen. Aan de hand van diverse voorbeelden verduidelijken we hoe dit fundamentele wiskundige gereedschap essentieel is voor het analyseren van functies met meerdere variabelen.

Daarnaast bespreken we de belangrijke rol van partiële afgeleiden in de natuurkunde, met specifieke aandacht voor de kwantummechanica en de kwantumveldentheorie. In die laatste context werken we niet enkel met scalaire grootheden, maar ook met velden en operatoren die variëren in ruimte en tijd. Partiële afgeleiden zijn hierbij onmisbaar om de dynamica van deze grootheden en de interacties tussen verschillende kwantumvelden te doorgronden.

1 Wat is het concept?

Bij een gewone afgeleide beschouwen we een functie $f(x)$ die afhangt van één variabele x . De afgeleide $f'(x)$ geeft aan hoe snel de functie verandert wanneer x een kleine verandering ondergaat.

Bij partiële differentiatie hebben we te maken met functies van meerdere variabelen, bijvoorbeeld $f(x, y)$. De partiële afgeleide van f ten opzichte van x , genoteerd als

$$\frac{\partial f}{\partial x},$$

geeft aan hoe snel de functie verandert wanneer alleen x verandert, terwijl y constant gehouden wordt.

Op analoge wijze geeft de partiële afgeleide van f ten opzichte van y , genoteerd als

$$\frac{\partial f}{\partial y},$$

aan hoe snel de functie verandert wanneer alleen y verandert, terwijl x constant blijft.

2 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^2.$$

Dan is de partiële afgeleide naar x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2,$$

omdat we y als constante beschouwen.

De partiële afgeleide naar y is:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy,$$

omdat we nu x als constante behandelen.

3 Waarom is dit belangrijk?

Partiële afgeleiden spelen een fundamentele rol in de wiskunde, fysica, ingenieurswetenschappen en economie. Ze worden gebruikt om veranderingen in systemen met meerdere variabelen te beschrijven. In de fysica verschijnen ze bijvoorbeeld in:

- de warmteleidingsvergelijking,
- de golfvergelijking,
- de Maxwellvergelijkingen,
- de Schrödingervergelijking,
- en in de kwantumveldentheorie.

Wanneer fysische grootheden afhangen van plaats en tijd, zoals $\phi(x, y, z, t)$, zijn partiële afgeleiden noodzakelijk om te beschrijven hoe deze grootheden evolueren.

4 Rekenregels voor partiële afgeleiden

Bij partiële afgeleiden gelden vrijwel dezelfde basisregels als bij gewone afgeleiden. Het grote verschil is dat we telkens afleiden naar één variabele, terwijl we de andere variabelen als constant beschouwen.

Beschouw twee differentieerbare functies $f(x, y)$ en $g(x, y)$, en twee constanten $a, b \in \mathbb{R}$.

4.1 Lineariteit

De partiële afgeleide is lineair. Dat betekent dat:

$$\frac{\partial}{\partial x}(af(x, y) + bg(x, y)) = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial g}{\partial x}$$

en analoog:

$$\frac{\partial}{\partial y}(af(x, y) + bg(x, y)) = a\frac{\partial f}{\partial y} + b\frac{\partial g}{\partial y}$$

Voorbeeld. Neem

$$f(x, y) = x^2y, \quad g(x, y) = 3xy^2.$$

Dan is

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + g) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 3xy^2) = 2xy + 3y^2.$$

4.2 Productregel

Voor het product van twee functies geldt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}$$

en evenzo voor afleiding naar y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}$$

Voorbeeld. Neem

$$f(x, y) = x^2 + y \quad \text{en} \quad g(x, y) = xy.$$

Dan is

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = y.$$

Dus:

$$\frac{\partial}{\partial x}((x^2 + y)(xy)) = (x^2 + y)y + (xy)2x.$$

Uitwerken geeft:

$$\frac{\partial}{\partial x}((x^2 + y)(xy)) = x^2y + y^2 + 2x^2y = 3x^2y + y^2.$$

4.3 Quotiëntregel

Voor een quotiënt van twee functies geldt, zolang $g(x, y) \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

Op dezelfde manier:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$$

Voorbeeld. Beschouw

$$h(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y}.$$

Dan is

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x + y) = 1.$$

Dus:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{(x + y) \cdot 2x - (x^2 + y) \cdot 1}{(x + y)^2}.$$

4.4 Kettingregel

De kettingregel gebruiken we wanneer een functie afhangt van variabelen die zelf weer afhangen van andere variabelen.

Stel:

$$z = f(u, v),$$

waarbij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Dan geldt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

en analoog:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Voorbeeld. Neem

$$z = u^2 + v^2, \quad u = x + y, \quad v = xy.$$

Dan is

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Dus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot y.$$

Omdat $u = x + y$ en $v = xy$, volgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x + y) + 2xy^2.$$

4.5 Gemengde partiële afgeleiden

Wanneer een functie voldoende glad is, mogen we de volgorde van differentiëren verwisselen. Met “voldoende glad” bedoelen we hier dat de tweede partiële afgeleiden bestaan en continu zijn in een omgeving van het beschouwde punt.

Dat betekent:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Dit resultaat staat bekend als de *stelling van Clairaut* of de *stelling van Schwarz*.

Voorbeeld. Neem

$$f(x, y) = x^2 y^3.$$

Eerst differentiëren we naar x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3.$$

Daarna naar y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 6xy^2.$$

Omgekeerd:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2,$$

en dan naar x :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^2) = 6xy^2.$$

Beide resultaten zijn gelijk.

4.6 Samenvatting van de rekenregels

Voor partiële afgeleiden gelden dus de volgende basisregels:

$$\frac{\partial}{\partial x}(af + bg) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \quad (g \neq 0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4.7 Oefening

Bereken de partiële afgeleiden naar x en naar y van de functie

$$f(x, y) = x^3y + 2x^2y^2 - 5y.$$

4.8 Oplossing van de oefening

Voor de partiële afgeleide naar x beschouwen we y als constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y + 2x^2y^2 - 5y) = 3x^2y + 4xy^2.$$

Voor de partiële afgeleide naar y beschouwen we x als constante:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y + 2x^2y^2 - 5y) = x^3 + 4x^2y - 5.$$

5 Bewijs van de rekenregels voor partiële afgeleiden

In deze sectie bewijzen we de belangrijkste rekenregels voor partiële afgeleiden. De meeste bewijzen verlopen volledig analoog aan die van gewone afgeleiden, met dat verschil dat we telkens slechts naar één variabele afleiden en de andere variabelen constant houden.

Definitie 5.1 (Partiële afgeleide naar x). *Zij $f(x, y)$ een functie van twee variabelen. De partiële afgeleide van f naar x in het punt (x, y) is gedefinieerd door*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

op voorwaarde dat deze limiet bestaat.

Opmerking 5.2. *In deze definitie wordt de variabele y constant gehouden. Op analoge wijze definiëren we de partiële afgeleide naar y :*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}.$$

5.1 Bewijs van de lineariteit

Stelling 5.3 (Lineariteit). *Zij $f(x, y)$ en $g(x, y)$ twee functies waarvoor de partiële afgeleiden naar x bestaan. Voor alle constanten $a, b \in \mathbb{R}$ geldt:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(af + bg) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Bewijs. Volgens de definitie van de partiële afgeleide hebben we:

$$\frac{\partial}{\partial x}(af + bg) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(af + bg)(x+h, y) - (af + bg)(x, y)}{h}.$$

We werken de teller uit:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(x+h, y) + bg(x+h, y) - af(x, y) - bg(x, y)}{h}.$$

We groeperen de termen:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(f(x+h, y) - f(x, y)) + b(g(x+h, y) - g(x, y))}{h}.$$

Door de lineariteit van de limiet volgt:

$$= a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} + b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h}.$$

Dus:

$$\frac{\partial}{\partial x}(af + bg) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial x}.$$

□

5.2 Bewijs van de productregel

Stelling 5.4 (Productregel). *Zij $f(x, y)$ en $g(x, y)$ twee functies waarvoor de partiële afgeleiden naar x bestaan. Dan geldt:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Bewijs. We vertrekken opnieuw van de definitie:

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y)g(x+h, y) - f(x, y)g(x, y)}{h}.$$

Om deze uitdrukking te herschrijven, tellen we een geschikte tussenterm op en trekken we die weer af:

$$f(x+h, y)g(x+h, y) - f(x+h, y)g(x, y) + f(x+h, y)g(x, y) - f(x, y)g(x, y).$$

Daarmee wordt de teller:

$$f(x+h, y)(g(x+h, y) - g(x, y)) + g(x, y)(f(x+h, y) - f(x, y)).$$

Dus:

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h, y) \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} + g(x, y) \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \right].$$

Als f en g partieel differentieerbaar zijn, dan zijn ze in het bijzonder continu in de beschouwde richting, zodat

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h, y) = f(x, y).$$

Daarom volgt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f(x, y) \frac{\partial g}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Dit is precies de productregel. □

5.3 Bewijs van de quotiëntregel

Stelling 5.5 (Quotiëntregel). *Zij $f(x, y)$ en $g(x, y)$ twee functies waarvoor de partiële afgeleiden naar x bestaan, met $g(x, y) \neq 0$. Dan geldt:*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}.$$

Bewijs. We schrijven eerst:

$$\frac{f}{g} = f g^{-1}.$$

Toepassing van de productregel geeft:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} g^{-1} + f \frac{\partial}{\partial x} (g^{-1}).$$

We moeten nu de afgeleide van g^{-1} bepalen. Beschouw de functie

$$\phi(u) = u^{-1}.$$

Voor $u = g(x, y)$ weten we dat

$$\frac{\partial}{\partial x} (g^{-1}) = -\frac{1}{g^2} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Invullen levert:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{g} - f \frac{1}{g^2} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

We brengen alles op gemeenschappelijke noemer:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}.$$

Daarmee is de quotiëntregel bewezen. □

5.4 Bewijs van de kettingregel

Stelling 5.6 (Kettingregel). *Zij*

$$z = f(u, v),$$

waarbij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Als alle betrokken afgeleiden bestaan en voldoende regelmatig zijn, dan geldt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bewijs. De functie z hangt van x af via de tussenvariabelen u en v . Wanneer x een kleine verandering Δx ondergaat, veranderen u en v mee:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x, \quad \Delta v \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x.$$

De verandering in $z = f(u, v)$ kan dan lineair benaderd worden door:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v.$$

Door de uitdrukkingen voor Δu en Δv in te vullen, krijgen we:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x.$$

We delen door Δx :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \approx \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

In de limiet voor $\Delta x \rightarrow 0$ volgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

□

Opmerking 5.7. Een volledig rigoureuus bewijs van de kettingregel vereist een nauwkeurige behandeling van resttermen. Daarom gaan we deze in het volgende hoofdstuk verder uitwerken, waarna we terugkomen op de kettingregel en een meer formeel bewijs geven.

5.5 Gelijkheid van gemengde partiële afgeleiden

Stelling 5.8 (Stelling van Clairaut-Schwarz). *Zij $f(x, y)$ een functie waarvan de tweede partiële afgeleiden continu zijn in een buurt van een punt (x, y) . Dan geldt:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Bewijs. Het volledige bewijs is technisch wat zwaarder en gebruikt de continuïteit van de tweede partiële afgeleiden samen met een analyse van verschilquotienten op een kleine rechthoek in het (x, y) -vlak.

Het centrale idee is dat men het verschil

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

op twee verschillende manieren kan benaderen: eerst door naar x en daarna naar y te differentiëren, en vervolgens in omgekeerde volgorde. De continuïteit van de tweede afgeleiden zorgt ervoor dat beide limieten samenvallen.

Daaruit volgt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

□

5.6 Besluit

We besluiten dat de fundamentele rekenregels voor partiële afgeleiden rechtstreeks voortvloeien uit de limietdefinitie, net zoals bij gewone afgeleiden. Deze regels vormen de basis voor vrijwel alle verdere toepassingen van multivariabele analyse, differentiaalvergelijkingen en mathematische fysica.

6 Resttermen en differentieerbaarheid

In eerdere afleidingen, zoals bij de kettingregel, hebben we veranderingen van een functie benaderd door lineaire termen. Strikt genomen verschijnen daarbij echter extra termen die we *resttermen* noemen. In deze sectie analyseren we deze resttermen nauwkeurig.

6.1 Lineaire benadering van een functie

Beschouw een functie $f(x, y)$ en een punt (x, y) . Wanneer we een kleine verandering maken

$$x \rightarrow x + \Delta x, \quad y \rightarrow y + \Delta y,$$

dan verandert de functiewaarde:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Als de functie differentieerbaar is, kan deze verandering geschreven worden als

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + R(\Delta x, \Delta y),$$

waarbij $R(\Delta x, \Delta y)$ de *restterm* is.

6.2 Eigenschap van de restterm

De restterm heeft een belangrijke eigenschap: hij wordt veel kleiner dan de lineaire termen wanneer Δx en Δy naar nul gaan.

Formeel betekent dit:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{R(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Dit betekent dat de restterm sneller naar nul gaat dan de afstand tot het punt (x, y) .

Opmerking 6.1. *Intuïtief betekent dit dat de lineaire termen de dominante bijdrage leveren voor zeer kleine veranderingen. De restterm vertegenwoordigt de fout van de lineaire benadering.*

6.3 Geometrische interpretatie

De lineaire benadering

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

beschrijft het raakvlak aan het oppervlak $z = f(x, y)$ in het punt (x, y) . De restterm meet dus hoe sterk het werkelijke oppervlak afwijkt van dit raakvlak.

Met andere woorden:

- de lineaire termen beschrijven het raakvlak,
- de restterm beschrijft de kromming van het oppervlak.

6.4 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Dan is

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Beschouw een kleine verandering $(\Delta x, \Delta y)$. We berekenen:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2.$$

Uitwerken geeft:

$$= x^2 + y^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

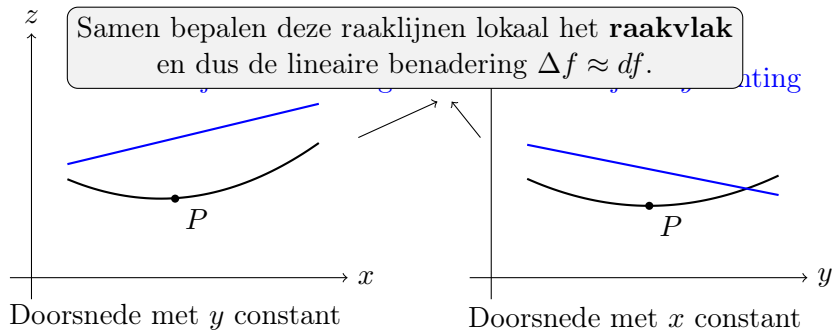
Dus

$$\Delta f = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Hier zien we duidelijk de structuur:

$$\Delta f = \underbrace{2x\Delta x + 2y\Delta y}_{\text{lineaire termen}} + \underbrace{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}_{\text{restterm}}.$$

De restterm bestaat hier uit termen van tweede orde.



Figuur 1: Twee doorsnedes van het oppervlak $z = f(x, y)$ door hetzelfde punt P . De raaklijn in de x -richting en de raaklijn in de y -richting vatten samen het lokale raakvlak samen, dat de lineaire termen van Δf beschrijft.

6.5 Resttermen en Taylorontwikkeling

Resttermen verschijnen ook in de Taylorontwikkeling van functies. Voor een functie van twee variabelen krijgen we bijvoorbeeld:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + R(\Delta x, \Delta y).$$

Wanneer we hogere orde termen toevoegen, kunnen we de restterm steeds kleiner maken.

6.6 Waarom resttermen belangrijk zijn

Resttermen spelen een cruciale rol in de analyse omdat ze toelaten om:

- de nauwkeurigheid van lineaire benaderingen te begrijpen,
- rigoureuze bewijzen van rekenregels te geven,
- de kettingregel en productregel correct te bewijzen,
- Taylorontwikkelingen te formuleren.

Zonder controle over resttermen zouden veel afleidingen in de differentiaalrekening slechts heuristisch zijn.

6.7 Samenvatting

Voor een differentieerbare functie $f(x, y)$ kan een kleine verandering geschreven worden als

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + R(\Delta x, \Delta y),$$

waarbij de restterm voldoet aan

$$\frac{R(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

De restterm beschrijft dus het verschil tussen de werkelijke functieverandering en de lineaire benadering.

7 De totale differentiaal

Wanneer een functie van meerdere variabelen afhangt, kan een kleine verandering in de invoervariabelen een verandering van de functiewaarde veroorzaken. De *totale differentiaal* beschrijft de lineaire benadering van deze verandering.

7.1 Definitie

Beschouw een functie van twee variabelen

$$f(x, y).$$

Als f differentieerbaar is, dan kan de verandering van de functie geschreven worden als

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + R(\Delta x, \Delta y),$$

waarbij $R(\Delta x, \Delta y)$ de restterm is.

De *totale differentiaal* van f wordt gedefinieerd als het lineaire deel van deze uitdrukking:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Hierbij stellen dx en dy kleine veranderingen van x en y voor.

7.2 Interpretatie

De totale differentiaal geeft een lineaire benadering van de verandering van de functie:

$$\Delta f \approx df.$$

Voor zeer kleine veranderingen van x en y is deze benadering zeer nauwkeurig.

Opmerking 7.1. *Geometrisch stelt df de verandering van de functie voor langs het raakvlak aan het oppervlak $z = f(x, y)$.*

7.3 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

De totale differentiaal wordt dus

$$df = 2x dx + 2y dy.$$

Dit betekent dat een kleine verandering van de functie kan worden benaderd door

$$\Delta f \approx 2x \Delta x + 2y \Delta y.$$

7.4 Totale differentiaal van functies met meerdere variabelen

Voor een functie van n variabelen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

wordt de totale differentiaal gegeven door

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Deze formule speelt een fundamentele rol in de multivariabele analyse.

7.5 Toepassing: benadering van functiewaarden

De totale differentiaal kan gebruikt worden om functiewaarden te benaderen.

Beschouw bijvoorbeeld

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

We willen de waarde van $f(3.02, 4.01)$ benaderen.

We kiezen het punt $(3, 4)$, waarvoor

$$f(3, 4) = 5.$$

De partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

In het punt $(3, 4)$ krijgen we

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{5}.$$

De veranderingen zijn

$$dx = 0.02, \quad dy = 0.01.$$

Dus

$$df = \frac{3}{5}(0.02) + \frac{4}{5}(0.01).$$

Daaruit volgt een benadering van de functieverandering.

7.6 Relatie met de gradient

De totale differentiaal kan ook geschreven worden met behulp van de *gradientvector*:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Dan geldt

$$df = \nabla f \cdot (dx, dy).$$

Hier staat \cdot voor het scalaire product.

7.7 Belang van de totale differentiaal

De totale differentiaal speelt een centrale rol in:

- differentiaalrekening van meerdere variabelen
- optimalisatieproblemen
- foutanalyse en numerieke benaderingen
- differentiaalvergelijkingen
- natuurkundige theorieën met velden

In de fysica verschijnen totale differentiële bijvoorbeeld in thermodynamica, waar grootheden zoals energie, entropie en arbeid worden uitgedrukt met differentiële relaties.

8 De gradiënt

In de multivariabele analyse speelt de *gradiënt* een centrale rol. De gradiënt van een functie beschrijft hoe de functiewaarde verandert in de ruimte en geeft zowel de richting als de grootte van de sterkste toename van de functie.

8.1 Definitie

Beschouw een scalaire functie van drie variabelen

$$f(x, y, z).$$

De *gradiënt* van deze functie wordt gedefinieerd als de vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

De gradiënt is dus een vectorveld dat aan elk punt in de ruimte een vector toekent.

8.2 Relatie met de totale differentiaal

De totale differentiaal van een functie kan compact geschreven worden met behulp van de gradiënt.

Voor een functie $f(x, y, z)$ geldt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Met de gradiëntnotatie kan dit geschreven worden als

$$df = \nabla f \cdot (dx, dy, dz),$$

waarbij \cdot het scalaire product voorstelt.

8.3 Geometrische interpretatie

De gradiëntvector heeft een duidelijke geometrische betekenis.

- De gradiënt wijst in de richting van de grootste toename van de functie.
- De grootte van de gradiënt geeft aan hoe snel de functie in die richting verandert.
- De gradiënt staat loodrecht op niveauoppervlakken van de functie.

Als $f(x, y, z)$ een niveau-oppervlak definieert

$$f(x, y, z) = c,$$

dan staat ∇f loodrecht op dit oppervlak.

8.4 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

De partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

De gradiënt wordt dus

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z).$$

Deze vector wijst radiaal naar buiten vanaf de oorsprong.

8.5 Relatie met de richtingschafgeleide

De richtingschafgeleide van een functie in de richting van een eenheidsvector \mathbf{u} wordt gegeven door

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Dit betekent dat de verandering van de functie in een bepaalde richting wordt verkregen door het scalaire product van de gradiënt met die richting.

8.6 De nabla-operator

De gradiënt wordt vaak geschreven met behulp van de zogenaamde *nabla-operator*:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Wanneer deze operator wordt toegepast op een scalaire functie f , krijgen we de gradiënt van die functie.

Opmerking 8.1. Een uitgebreide uitleg van de nabla-operator, inclusief toepassingen in de fysica (zoals de divergentie en rotatie van vectorvelden), kan gevonden worden in een apart document op de website.

8.7 Belang van de gradiënt

De gradiënt speelt een belangrijke rol in vele domeinen van de wiskunde en natuurkunde.

- optimalisatieproblemen
- differentiaalvergelijkingen
- veldentheorie
- elektromagnetisme
- vloeistofdynamica

In de fysica beschrijft de gradiënt bijvoorbeeld hoe een potentiaalveld verandert in de ruimte.

9 Richtingsafgeleiden en maximale stijgingsrichting

In de vorige sectie hebben we gezien dat de gradiëntvector informatie bevat over de verandering van een functie in de ruimte. In deze sectie maken we dit preciezer door de *richtingsafgeleide* te definiëren. Deze beschrijft hoe een functie verandert wanneer we ons in een specifieke richting verplaatsen.

9.1 Definitie van de richtingsafgeleide

Beschouw een functie

$$f(x, y, z)$$

en een punt $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Laat \mathbf{u} een eenheidsvector zijn die een bepaalde richting in de ruimte voorstelt.

De *richtingsafgeleide* van f in de richting \mathbf{u} wordt gedefinieerd als

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{r}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{r}_0)}{h}.$$

Hierbij bewegen we dus vanuit het punt \mathbf{r}_0 een kleine afstand h in de richting \mathbf{u} .

9.2 Interpretatie

De richtingsafgeleide geeft de snelheid waarmee de functie verandert wanneer we ons verplaatsen in een specifieke richting.

- een positieve waarde betekent dat de functie toeneemt
- een negatieve waarde betekent dat de functie afneemt
- een waarde nul betekent dat de functie lokaal constant is in die richting

De richtingsafgeleide is dus een generalisatie van de gewone afgeleide naar willekeurige richtingen in de ruimte.

9.3 Relatie met de gradient

Een fundamenteel resultaat in de multivariabele analyse is dat de richtingsafgeleide kan worden uitgedrukt met behulp van de gradient.

Stelling 9.1. Voor een differentieerbare functie f geldt:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u},$$

waarbij \mathbf{u} een eenheidsvector is.

Bewijs. Laat

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

en

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

een eenheidsvector zijn.

Wanneer we een kleine verplaatsing maken

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + h\mathbf{u},$$

krijgen we

$$f(x + hu_1, y + hu_2, z + hu_3).$$

Volgens de lineaire benadering van differentieerbare functies geldt

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} hu_1 + \frac{\partial f}{\partial y} hu_2 + \frac{\partial f}{\partial z} hu_3.$$

Dus

$$\frac{\Delta f}{h} \approx \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3.$$

In de limiet $h \rightarrow 0$ volgt

$$D_{\mathbf{u}}f = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3.$$

Dit is precies het scalaire product

$$\nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

□

9.4 Maximale stijgingsrichting

De bovenstaande formule laat ons toe een belangrijke eigenschap van de gradient te begrijpen.

Omdat

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u},$$

kunnen we schrijven

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta.$$

Omdat \mathbf{u} een eenheidsvector is, geldt $|\mathbf{u}| = 1$ en dus

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos \theta.$$

De maximale waarde van deze uitdrukking ontstaat wanneer

$$\cos \theta = 1.$$

Dit gebeurt wanneer de richting \mathbf{u} dezelfde richting heeft als de gradient.

Stelling 9.2. *De maximale stijging van een functie gebeurt in de richting van de gradient ∇f , en de grootte van deze maximale stijging is*

$$|\nabla f|.$$

9.5 Geometrische betekenis

Dit resultaat heeft een duidelijke geometrische interpretatie.

- de gradient wijst in de richting van de grootste stijging
- de grootte van de gradient geeft aan hoe snel de functie stijgt
- de gradient staat loodrecht op niveaoppervlakken

Daarom wordt de gradient vaak geïnterpreteerd als een soort *richting van steilste helling*.

9.6 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De gradient is

$$\nabla f = (2x, 2y).$$

In het punt $(1, 2)$ krijgen we

$$\nabla f = (2, 4).$$

De richting van de grootste stijging is dus de richting van de vector $(2, 4)$.

De grootte van de maximale stijging is

$$|\nabla f| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}.$$

9.7 Samenvatting

De richtingsafgeleide beschrijft hoe een functie verandert wanneer we ons in een specifieke richting verplaatsen.

Voor een differentieerbare functie geldt

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Hieruit volgt een belangrijk resultaat:

- de gradient geeft de richting van maximale stijging
- de grootte van de gradient geeft de maximale stijgingssnelheid

Deze concepten spelen een centrale rol in optimalisatieproblemen, differentiaalvergelijkingen en vele toepassingen in de fysica.

10 Een terugblik op de kettingregel

Nu we de resttermen en de totale differentiaal hebben besproken, kunnen we terugkomen op de kettingregel en een meer rigoureuus bewijs geven. Het grote verschil met de eerdere, meer intuïtieve afleiding is dat we nu expliciet rekening houden met de resttermen die optreden in de lineaire benaderingen.

Stelling 10.1 (Kettingregel, rigoureuus bewijs). *Zij*

$$z = f(u, v),$$

waarbij

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Veronderstel dat u en v differentieerbaar zijn als functies van (x, y) en dat f differentieerbaar is als functie van (u, v) . Dan geldt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bewijs. We willen de partiële afgeleide van $z = f(u(x, y), v(x, y))$ naar x bepalen. Daarvoor bekijken we een kleine verandering in x , terwijl y constant gehouden wordt.

Stap 1: verandering van u en v bij een verandering van x

Beschouw een kleine toename h van x . Dan gaat

$$x \rightarrow x + h,$$

terwijl y onveranderd blijft.

Daardoor veranderen ook u en v . We noteren:

$$\Delta u = u(x + h, y) - u(x, y), \quad \Delta v = v(x + h, y) - v(x, y).$$

Omdat u en v differentieerbaar zijn, mogen we hun verandering schrijven als een lineair deel plus een restterm. Omdat alleen x verandert, krijgen we:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} h + r_u(h), \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} h + r_v(h), \end{aligned}$$

waarbij de resttermen voldoen aan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_u(h)}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_v(h)}{h} = 0.$$

Met andere woorden:

$$r_u(h) = o(h), \quad r_v(h) = o(h).$$

Stap 2: verandering van $z = f(u, v)$

Nu bekijken we de verandering van z die veroorzaakt wordt door de veranderingen Δu en Δv .

We hebben:

$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

Omdat f differentieerbaar is als functie van (u, v) , kunnen we ook hier een lineaire benadering met restterm gebruiken:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v + r_f(\Delta u, \Delta v),$$

waarbij de restterm $r_f(\Delta u, \Delta v)$ voldoet aan

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \frac{r_f(\Delta u, \Delta v)}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} = 0.$$

Dit betekent dat

$$r_f(\Delta u, \Delta v) = o\left(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}\right).$$

Stap 3: invullen van de ontwikkelingen van Δu en Δv

We vullen nu de uitdrukkingen voor Δu en Δv in:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} h + r_u(h) \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} h + r_v(h) \right) + r_f(\Delta u, \Delta v).$$

Uitwerken geeft:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial u} r_u(h) + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial v} r_v(h) + r_f(\Delta u, \Delta v).$$

We groeperen de termen waarin h expliciet voorkomt:

$$\Delta z = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) h + \frac{\partial f}{\partial u} r_u(h) + \frac{\partial f}{\partial v} r_v(h) + r_f(\Delta u, \Delta v).$$

Stap 4: delen door h

Om de partiële afgeleide naar x te vinden, delen we door h :

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{r_u(h)}{h} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{r_v(h)}{h} + \frac{r_f(\Delta u, \Delta v)}{h}.$$

We willen nu de limiet nemen voor $h \rightarrow 0$.

De eerste twee termen blijven gewoon staan. Voor de derde en vierde term geldt, omdat $r_u(h) = o(h)$ en $r_v(h) = o(h)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_u(h)}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_v(h)}{h} = 0.$$

Dus:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{r_u(h)}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{r_v(h)}{h} = 0.$$

Stap 5: controle van de laatste restterm

Nu moeten we nog aantonen dat

$$\frac{r_f(\Delta u, \Delta v)}{h} \rightarrow 0 \quad \text{voor } h \rightarrow 0.$$

Omdat u en v differentieerbaar zijn, zijn zij in het bijzonder continu, en bovendien geldt uit hun lineaire ontwikkeling dat $\Delta u \rightarrow 0$ en $\Delta v \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$.

Verder geldt:

$$r_f(\Delta u, \Delta v) = o\left(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}\right).$$

Dus kunnen we schrijven:

$$r_f(\Delta u, \Delta v) = \varepsilon(h) \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2},$$

waarbij $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ voor $h \rightarrow 0$.

Daarom is

$$\frac{r_f(\Delta u, \Delta v)}{h} = \varepsilon(h) \frac{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}}{h}.$$

We onderzoeken nu de factor

$$\frac{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}}{h}.$$

Omdat

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} h + r_u(h), \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} h + r_v(h),$$

volgt dat zowel Δu als Δv van orde h zijn. Meer precies:

$$\Delta u = O(h), \quad \Delta v = O(h).$$

Daaruit volgt

$$\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2} = O(h).$$

Dus bestaat er een constante $C > 0$ zodat voor h voldoende klein:

$$\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2} \leq Ch.$$

Hieruit volgt:

$$\left| \frac{r_f(\Delta u, \Delta v)}{h} \right| = |\varepsilon(h)| \frac{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}}{h} \leq C|\varepsilon(h)|.$$

Omdat $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, volgt nu:

$$\frac{r_f(\Delta u, \Delta v)}{h} \rightarrow 0.$$

Stap 6: nemen van de limiet

We nemen nu de limiet van de volledige uitdrukking:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{h} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Maar per definitie is

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h, y) - z(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{h}.$$

Dus besluiten we:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dit bewijst de kettingregel. □

11 Richtingsvectoren en niveauverzamelingen

In de multivariabele analyse is het vaak nuttig om functies niet enkel te bekijken als formules, maar ook als geometrische objecten. Een functie van meerdere variabelen kan bijvoorbeeld oppervlakken of hogere-dimensionale structuren beschrijven. Twee belangrijke concepten die hierbij helpen zijn richtingsvectoren en niveauverzamelingen.

Deze concepten zijn nauw verbonden met de gradiënt en spelen een centrale rol in geometrische interpretaties van differentiaalrekening, optimalisatie en veldentheorie in de fysica.

11.1 Richtingsvectoren

Een richtingsvector beschrijft een bepaalde richting in de ruimte.

In het vlak \mathbb{R}^2 schrijven we een vector bijvoorbeeld als

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2).$$

In de driedimensionale ruimte \mathbb{R}^3 schrijven we

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

De lengte van een vector wordt gegeven door de Euclidische norm:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Vaak gebruiken we een *eenheidsvector* om een richting te beschrijven. Dit is een vector met lengte 1:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Eenheidsvectoren zijn bijzonder nuttig omdat zij enkel de richting van een beweging beschrijven en niet de grootte.

11.2 Beweging in een gegeven richting

Beschouw een punt

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

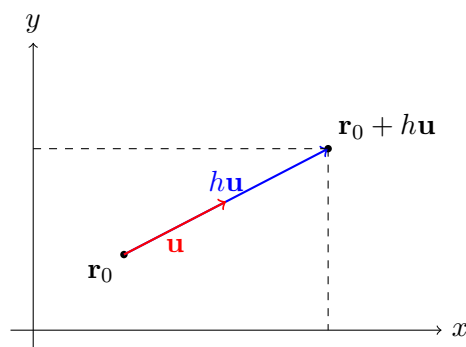
en een richting gegeven door een eenheidsvector \mathbf{u} .

Wanneer we ons een kleine afstand h verplaatsen in deze richting, komen we in het punt

$$\mathbf{r}(h) = \mathbf{r}_0 + h\mathbf{u}.$$

In coördinaten wordt dit

$$(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2, z_0 + hu_3).$$



Figuur 2: Schematische verplaatsing in een gegeven richting: vanuit \mathbf{r}_0 bewegen we een afstand h in de richting van de eenheidsvector \mathbf{u} .

Dit idee vormt de basis voor het definiëren van richtingsafgeleiden, die beschrijven hoe een functie verandert wanneer we ons in een specifieke richting verplaatsen.

11.3 Niveauverzamelingen

Beschouw een functie

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Voor een constante waarde c definiëren we de *niveauverzameling*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c.$$

Dit is de verzameling van alle punten waarvoor de functie dezelfde waarde c aanneemt.

11.4 Niveaucurven

Wanneer we een functie van twee variabelen beschouwen

$$f(x, y),$$

dan worden de niveauverzamelingen gegeven door

$$f(x, y) = c.$$

Deze verzamelingen zijn in het algemeen *curven* in het vlak en worden *niveaucurven* of *contourlijnen* genoemd.

Voorbeeld:

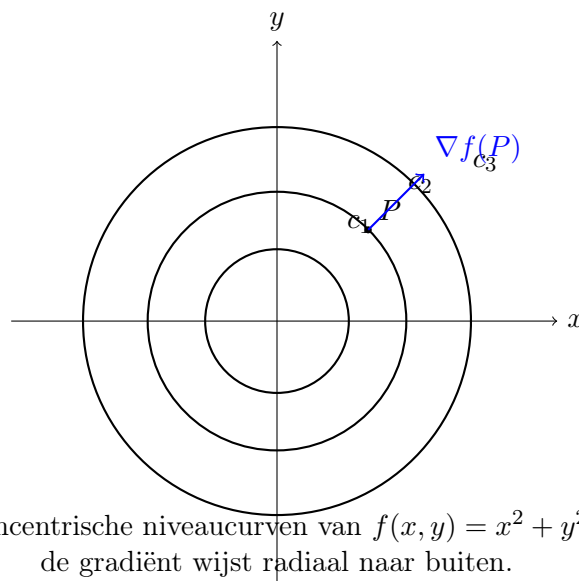
Beschouw de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De niveaucurven worden bepaald door

$$x^2 + y^2 = c.$$

Dit zijn cirkels met straal \sqrt{c} en middelpunt in de oorsprong. Elke waarde van c geeft dus een andere cirkel.



Figuur 3: Niveaucurven van $f(x, y) = x^2 + y^2$: voor verschillende waarden van c krijgen we concentrische cirkels.

Niveaucurven worden veel gebruikt in:

- topografische kaarten (hoogtelijnen)
- meteorologie (druklijnen)
- optimalisatieproblemen
- fysische potentiaalvelden

11.5 Niveauoppervlakken

Voor een functie van drie variabelen

$$f(x, y, z)$$

wordt de niveauperzameling gegeven door

$$f(x, y, z) = c.$$

In dit geval krijgen we meestal een oppervlak in de ruimte. Dit noemen we een *niveauoppervlak*.

Voorbeeld:

Beschouw

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dan krijgen we

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

Dit beschrijft een bol met straal \sqrt{c} .

11.6 Relatie met de gradiënt

Een fundamenteel resultaat in de multivariabele analyse is dat de gradiëntvector loodrecht staat op niveauperzamelingen.

Beschouw een differentieerbare functie $f(x, y)$ en een niveaucurve

$$f(x, y) = c.$$

Stel dat we langs deze curve bewegen. Dan verandert de functiewaarde niet, omdat ze constant gelijk blijft aan c .

Daarom geldt voor een kleine verplaatsing (dx, dy) langs de curve:

$$df = 0.$$

Maar we weten dat

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Dus

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

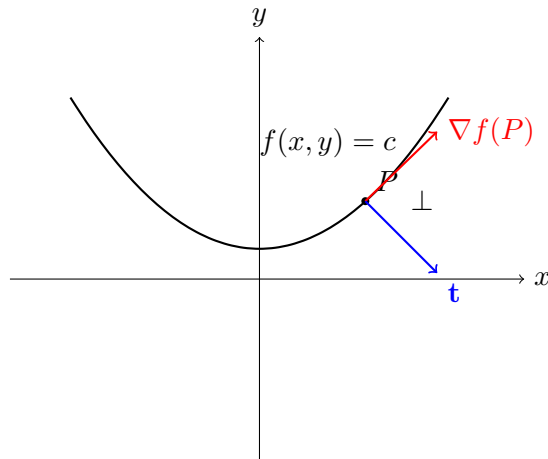
In vectornotatie wordt dit

$$\nabla f \cdot (dx, dy) = 0.$$

Dit betekent dat de verplaatsingsvector (dx, dy) loodrecht staat op de gradiëntvector.

We concluderen dus:

De gradiënt staat loodrecht op niveaucurven en niveauoppervlakken.



Figuur 4: Op een niveaucurve $f(x, y) = c$ staat de gradiënt $\nabla f(P)$ loodrecht op elke raakvector \mathbf{t} in P .

11.7 Geometrische interpretatie

De relatie tussen de gradiënt en niveauverzamelingen heeft een duidelijke geometrische betekenis:

- de gradiënt wijst in de richting waarin de functie het snelst stijgt
- niveaucurven zijn lijnen waar de functie constant blijft
- daarom moet de gradiënt loodrecht staan op deze curven

Men kan zich dit intuïtief voorstellen als een berglandschap:

- niveaucurven zijn hoogtelijnen op een kaart
- de gradiënt wijst in de richting van de steilste helling

11.8 Voorbeeld

Beschouw opnieuw de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De gradiënt is

$$\nabla f = (2x, 2y).$$

De niveaucurven zijn cirkels

$$x^2 + y^2 = c.$$

De vector $(2x, 2y)$ wijst radiaal naar buiten en staat dus loodrecht op de cirkels. Dit bevestigt het algemene resultaat dat de gradiënt normaal staat op niveaucurven.

11.9 Belang van niveauverzamelingen

Niveauverzamelingen spelen een belangrijke rol in verschillende domeinen:

- geometrische interpretatie van functies
- optimalisatieproblemen

- visualisatie van functies van meerdere variabelen
- veldentheorie in de fysica
- differentiaalmeetkunde

In de fysica beschrijven niveauoppervlakken bijvoorbeeld oppervlakken met constante potentiaal in een elektrisch veld. De elektrische veldvector staat dan loodrecht op deze oppervlakken, net zoals de gradiënt loodrecht staat op niveauoppervlakken van een scalaire functie.

12 Taylorontwikkeling in meerdere variabelen

In de vorige secties hebben we gezien dat een differentieerbare functie lokaal benaderd kan worden door een lineaire uitdrukking. Deze lineaire benadering wordt gegeven door de totale differentiaal en beschrijft het raakvlak aan het oppervlak van de functie.

De Taylorontwikkeling is een uitbreiding van dit idee. In plaats van enkel een lineaire benadering te gebruiken, voegen we ook hogere-orde termen toe die de kromming van de functie beschrijven. Hierdoor verkrijgen we een veel nauwkeurigere lokale benadering.

12.1 Herinnering: lineaire benadering

Beschouw een functie van twee variabelen

$$f(x, y).$$

Voor een kleine verandering

$$(x, y) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

kunnen we de verandering van de functie schrijven als

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Als de functie differentieerbaar is, geldt de lineaire benadering

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + R(\Delta x, \Delta y),$$

waarbij $R(\Delta x, \Delta y)$ de restterm is.

Het lineaire deel

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

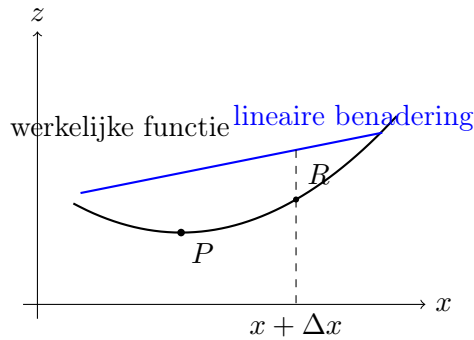
komt overeen met het raakvlak aan het oppervlak $z = f(x, y)$.

De Taylorontwikkeling gaat een stap verder en voegt termen van hogere orde toe.

12.2 Taylorontwikkeling van tweede orde

Wanneer de tweede partiële afgeleiden bestaan en continu zijn, kan een functie lokaal geschreven worden als

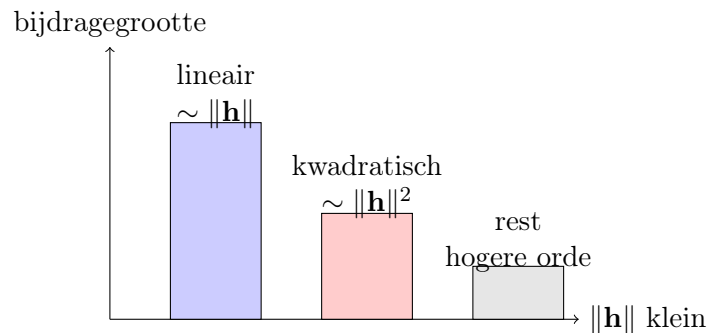
$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) + R_2(\Delta x, \Delta y).$$



Figuur 5: Doorsnede van $z = f(x, y)$: de lineaire benadering (blauw) benadert de functie nabij P , en het verticale verschil stelt de restterm R voor.

Hierbij stelt $R_2(\Delta x, \Delta y)$ de restterm van hogere orde voor.

De termen van tweede orde beschrijven de kromming van het oppervlak.



Figuur 6: Schaalvergelijking van termen in de Taylorontwikkeling: bij kleine verplaatsingen domineert het lineaire deel, terwijl tweede-orde en hogere-orde termen kleiner worden.

12.3 De Hessiaan

De tweede-orde termen kunnen compact geschreven worden met behulp van de *Hessiaanmatrix*.

Voor een functie $f(x, y)$ definiëren we

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Met behulp van deze matrix kan de Taylorontwikkeling van tweede orde geschreven worden als

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}) \mathbf{h} + R_2(\mathbf{h}),$$

waarbij

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Hier staat \mathbf{h}^T voor de getransponeerde vector.

12.4 Interpretatie van de verschillende termen

De Taylorontwikkeling heeft een duidelijke geometrische interpretatie.

- Het eerste deel $f(x, y)$ is de functiewaarde in het gekozen punt.
- Het lineaire deel

$$\nabla f \cdot (\Delta x, \Delta y)$$

beschrijft het raakvlak.

- Het kwadratische deel met de Hessiaan beschrijft de kromming van het oppervlak.

Voor zeer kleine veranderingen zijn de hogere-orde termen klein, waardoor de Taylorontwikkeling een uitstekende benadering vormt.

12.5 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De eerste afgeleiden zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

De tweede afgeleiden zijn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

De Taylorontwikkeling rond het punt (x, y) wordt dan

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = x^2 + y^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

In dit geval is de Taylorontwikkeling exact omdat de functie een polynoom van tweede graad is.

12.6 Algemene Taylorontwikkeling

Voor een functie van meerdere variabelen kan men ook hogere-orde Taylorontwikkelingen definiëren.

Voor een functie

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kan men schrijven

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \dots$$

waarbij de sommen lopen over alle variabelen.

Deze formule vormt de basis voor vele toepassingen in analyse, numerieke methoden en fysica.

12.7 Belang van de Taylorontwikkeling

De Taylorontwikkeling speelt een centrale rol in de multivariabele analyse.

Ze wordt gebruikt voor:

- lokale benaderingen van functies
- foutanalyse in numerieke berekeningen
- optimalisatieproblemen
- studie van stabiliteit van oplossingen
- fysische theorieën waarin kleine afwijkingen worden onderzocht

In veel toepassingen volstaat de Taylorontwikkeling van tweede orde, omdat deze reeds informatie bevat over zowel de helling als de kromming van een functie.

In het volgende hoofdstuk zullen we zien hoe de tweede-orde termen, via de Hessiaanmatrix, gebruikt kunnen worden om kritieke punten van functies te classificeren en zo lokale maxima, minima en zadelpunten te bepalen.

13 De Hessiaan

In de vorige sectie hebben we gezien dat de Taylorontwikkeling van tweede orde informatie bevat over de kromming van een functie. De tweede partiële afgeleiden spelen daarbij een centrale rol. Om deze systematisch te organiseren, introduceren we de *Hessiaanmatrix*.

De Hessiaan vormt een fundamenteel object in de multivariabele analyse en speelt een belangrijke rol in optimalisatie, differentiaalmeetkunde en natuurkunde.

13.1 Definitie

Beschouw een functie van twee variabelen

$$f(x, y).$$

De Hessiaan van f wordt gedefinieerd als de matrix van tweede partiële afgeleiden:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Meer algemeen, voor een functie van n variabelen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

wordt de Hessiaan gegeven door

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

De Hessiaan is dus een $n \times n$ matrix die alle tweede afgeleiden van de functie bevat.

13.2 Symmetrie van de Hessiaan

Wanneer de tweede partiële afgeleiden continu zijn, geldt volgens de stelling van Clairaut-Schwarz dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Dit betekent dat de Hessiaan symmetrisch is:

$$H_f = H_f^T.$$

Deze eigenschap is bijzonder belangrijk, omdat symmetrische matrices goede algebraïsche eigenschappen hebben en bijvoorbeeld altijd reële eigenwaarden bezitten.

13.3 Relatie met de Taylorontwikkeling

In de vorige sectie hebben we gezien dat de Taylorontwikkeling van tweede orde kan geschreven worden als

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}) \mathbf{h} + R_2(\mathbf{h}).$$

Hierbij stelt

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

een kleine verplaatsing voor.

De term

$$\mathbf{h}^T H_f \mathbf{h}$$

is een kwadratische vorm die de kromming van het oppervlak beschrijft.

13.4 Geometrische interpretatie

De Hessiaan beschrijft hoe de helling van een functie verandert in verschillende richtingen.

- De gradiënt geeft de helling van de functie.
- De Hessiaan beschrijft hoe deze helling zelf verandert.

Men kan de Hessiaan dus interpreteren als een maat voor de *kromming* van het oppervlak.

Wanneer alle tweede afgeleiden nul zijn, is de functie lokaal lineair. Wanneer de tweede afgeleiden verschillend van nul zijn, krijgt het oppervlak een kromming.

13.5 Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De tweede partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

De Hessiaan wordt dus

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix is positief, wat betekent dat het oppervlak overal naar boven gekromd is. Dit komt overeen met het feit dat $f(x, y) = x^2 + y^2$ een paraboloid vormt.

13.6 Voorbeeld met gemengde afgeleiden

Beschouw nu

$$f(x, y) = xy.$$

Dan zijn de tweede afgeleiden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

De Hessiaan wordt

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft zowel positieve als negatieve eigenwaarden, wat betekent dat het oppervlak een zadelvorm heeft.

13.7 Hessiaan en kromming van functies

De Hessiaan bevat dus informatie over de kromming van de functie.

In het bijzonder kan men met behulp van de Hessiaan bepalen of een punt een lokaal maximum, minimum of zadelpunt is.

Wanneer

$$\nabla f = 0$$

spreken we van een *kritiek punt*. De Hessiaan bepaalt dan het lokale gedrag van de functie rond dat punt.

- Als de Hessiaan positief definit is, is het punt een lokaal minimum.
- Als de Hessiaan negatief definit is, is het punt een lokaal maximum.
- Als de Hessiaan zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft, is het punt een zadelpunt.

Deze resultaten vormen de basis van veel optimalisatieproblemen.

13.8 Belang van de Hessiaan

De Hessiaan speelt een centrale rol in verschillende domeinen van de wiskunde en de natuurkunde.

- optimalisatie en extremumproblemen
- stabiliteitsanalyse van oplossingen
- differentiaalmeetkunde
- mechanica en potentiaalvelden
- numerieke optimalisatie-algoritmen

In veel toepassingen beschrijft de Hessiaan hoe een systeem reageert op kleine verstoringen rond een evenwichtspunt.

In het volgende hoofdstuk zullen we zien hoe deze matrix gebruikt kan worden om kritieke punten van functies systematisch te classificeren als maxima, minima of zadelpunten.

14 Kritieke punten en optimalisatie

In vele toepassingen van de wiskunde en de natuurkunde zijn we geïnteresseerd in het vinden van punten waar een functie haar maximale of minimale waarde aanneemt. Dit probleem staat bekend als een *optimalisatieprobleem*.

Voor functies van meerdere variabelen wordt de studie van maxima en minima sterk vereenvoudigd door het gebruik van de gradiënt en de Hessiaan.

14.1 Lokale maxima en minima

Beschouw een functie

$$f(x, y).$$

We zeggen dat f een *lokaal maximum* heeft in het punt (x_0, y_0) als er een omgeving van dat punt bestaat waarvoor

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

voor alle punten (x, y) in die omgeving.

Analoog zeggen we dat f een *lokaal minimum* heeft in (x_0, y_0) als

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

in een buurt van dat punt.

Wanneer een punt noch een maximum noch een minimum is, maar de functie in sommige richtingen stijgt en in andere daalt, spreken we van een *zadelpunt*.

14.2 Kritieke punten

Een eerste belangrijke stap bij het zoeken naar extrema is het bepalen van de *kritieke punten* van de functie.

Definitie 14.1. Een punt (x_0, y_0) wordt een *kritiek punt* van f genoemd als de gradiënt daar nul is:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Dit betekent dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

De reden voor deze definitie is dat de gradiënt de richting van de grootste stijging van de functie aangeeft. Wanneer de gradiënt nul is, is er lokaal geen richting waarin de functie onmiddellijk toeneemt of afneemt.

14.3 Noodzakelijke voorwaarde voor extrema

We formuleren nu een fundamenteel resultaat.

Stelling 14.2. *Als een differentieerbare functie $f(x, y)$ een lokaal maximum of minimum heeft in een punt (x_0, y_0) , dan geldt*

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0.$$

Bewijs. Stel dat f een lokaal maximum heeft in (x_0, y_0) . Beschouw een willekeurige richting gegeven door een eenheidsvector \mathbf{u} .

De verandering van de functie in deze richting wordt gegeven door de richtingsafgeleide:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Omdat (x_0, y_0) een maximum is, kan de functie in geen enkele richting toenemen. Daarom moet gelden

$$D_{\mathbf{u}}f = 0$$

voor alle richtingen \mathbf{u} .
Dit kan enkel wanneer

$$\nabla f = 0.$$

□

14.4 Classificatie van kritieke punten

Niet elk kritiek punt is een maximum of minimum. Om het gedrag van de functie rond een kritiek punt te begrijpen, gebruiken we de Hessiaanmatrix.

Voor een functie $f(x, y)$ definiëren we

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

We introduceren de determinant

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

Deze grootte bepaalt het type van het kritisch punt.

Stelling 14.3 (Tweede-afgeleidentest). *Beschouw een kritiek punt (x_0, y_0) van $f(x, y)$.*

- *Als $D > 0$ en $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, dan heeft f een lokaal minimum.*
- *Als $D > 0$ en $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, dan heeft f een lokaal maximum.*
- *Als $D < 0$, dan is het punt een zadelpunt.*

14.5 Interpretatie via de Taylorontwikkeling

De reden voor deze classificatie ligt in de Taylorontwikkeling van tweede orde.

Voor een klein verschil \mathbf{h} rond een kritiek punt geldt namelijk

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T H_f \mathbf{h}.$$

Omdat de lineaire term verdwijnt (de gradiënt is nul), wordt het gedrag van de functie volledig bepaald door de Hessiaan.

- Als $\mathbf{h}^T H_f \mathbf{h} > 0$ voor alle \mathbf{h} , dan is het punt een minimum.
- Als $\mathbf{h}^T H_f \mathbf{h} < 0$ voor alle \mathbf{h} , dan is het punt een maximum.
- Als het teken verandert afhankelijk van de richting, dan ontstaat een zadelpunt.

14.6 Voorbeeld: lokaal minimum

Beschouw

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De gradiënt is

$$\nabla f = (2x, 2y).$$

Het enige kritieke punt is

$$(0, 0).$$

De Hessiaan is

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De determinant is

$$D = 4 > 0$$

en

$$f_{xx} = 2 > 0.$$

Dus $(0, 0)$ is een lokaal minimum.

14.7 Voorbeeld: zadelpunt

Beschouw

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

De gradiënt is

$$\nabla f = (2x, -2y).$$

Het kritieke punt is opnieuw

$$(0, 0).$$

De Hessiaan is

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

De determinant is

$$D = -4 < 0.$$

Daarom is $(0, 0)$ een zadelpunt.

14.8 Procedure voor het oplossen van optimalisatieproblemen

Het bepalen van lokale extrema verloopt meestal volgens de volgende stappen:

1. Bereken de partiële afgeleiden van de functie.
2. Zoek de kritieke punten door het systeem

$$\nabla f = 0$$

op te lossen.

3. Bereken de tweede partiële afgeleiden.
4. Vorm de Hessiaan en bereken de determinant

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

5. Classificeer elk kritisch punt.

14.9 Belang van optimalisatie

Optimalisatieproblemen verschijnen in vele domeinen van de wetenschap en techniek.

- fysica (evenwichtstoestanden)
- economie (maximaliseren van winst)
- machine learning (minimaliseren van foutfuncties)
- engineering (optimalisatie van systemen)

De theorie van kritieke punten vormt daarom een essentieel onderdeel van de multivariabele differentiaalrekening.

15 Optimalisatie met randvoorwaarden: de methode van Lagrange-multipliers

In de vorige sectie hebben we gezien hoe lokale maxima en minima van een functie kunnen worden gevonden door de gradiënt nul te stellen. Dit werkt echter enkel wanneer de variabelen vrij kunnen variëren.

In veel praktische problemen zijn er echter *randvoorwaarden* of *beperkingen*. Bijvoorbeeld:

- een punt moet op een bepaalde kromme liggen,
- een systeem moet voldoen aan een behoudswet,
- een grootte moet constant blijven.

De methode van Lagrange-multipliers laat ons toe om zulke optimalisatieproblemen systematisch op te lossen.

15.1 Het probleem

Beschouw een functie

$$f(x, y)$$

die we willen maximaliseren of minimaliseren, onder de voorwaarde dat de variabelen voldoen aan een *constraint*

$$g(x, y) = c.$$

De vergelijking $g(x, y) = c$ beschrijft een kromme in het vlak. We zoeken dus de maximale of minimale waarde van f langs deze kromme.

15.2 Geometrische interpretatie

Een belangrijk inzicht is dat in een optimum langs de constraint de niveaucurven van f de constraint raken zonder deze te snijden.

Dit betekent dat hun raaklijnen parallel zijn.

Omdat de gradiëntvector loodrecht staat op niveaucurven, volgt dat in het optimum:

$$\nabla f \parallel \nabla g.$$

Dus bestaat er een getal λ waarvoor

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Het getal λ wordt de *Lagrange-multiplier* genoemd.

15.3 De Lagrange-vergelijkingen

Voor een functie van twee variabelen leidt dit tot het systeem

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

samen met de randvoorwaarde

$$g(x, y) = c.$$

In componenten wordt dit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$g(x, y) = c.$$

Dit systeem van vergelijkingen laat ons toe om de mogelijke optima te vinden.

15.4 Interpretatie van de Lagrange-multiplier

De Lagrange-multiplier λ heeft ook een interessante interpretatie.

Wanneer de constraint licht verandert, geeft λ de gevoeligheid van het optimum weer.

In vele fysische problemen komt λ overeen met een kracht of een potentiaal.

In de mechanica verschijnt de Lagrange-multiplier bijvoorbeeld als een *constraintkracht* die een systeem op een bepaalde baan houdt.

15.5 Voorbeeld

We willen de maximale waarde bepalen van

$$f(x, y) = xy$$

onder de voorwaarde

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Deze constraint beschrijft de eenheidscirkel.

We berekenen eerst de gradiënten.

Voor f :

$$\nabla f = (y, x).$$

Voor $g(x, y) = x^2 + y^2$:

$$\nabla g = (2x, 2y).$$

Volgens de methode van Lagrange-multipliers geldt

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Dus

$$y = 2\lambda x,$$

$$x = 2\lambda y.$$

Samen met de constraint

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Uit de eerste twee vergelijkingen volgt

$$x = \pm y.$$

Invullen in de constraint geeft

$$2x^2 = 1.$$

Dus

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daaruit volgen vier mogelijke punten.

De maximale waarde van f wordt bereikt wanneer x en y hetzelfde teken hebben:

$$f = \frac{1}{2}.$$

De minimale waarde ontstaat wanneer de tekens tegengesteld zijn:

$$f = -\frac{1}{2}.$$

15.6 Algemene formulering

Voor een functie

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

met een constraint

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$$

wordt het probleem opgelost door het systeem

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

samen met

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c.$$

Wanneer meerdere constraints aanwezig zijn, bijvoorbeeld

$$g_1(x) = c_1, \quad g_2(x) = c_2,$$

introduceren we meerdere Lagrange-multipliers:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2.$$

15.7 Belang van de methode

De methode van Lagrange-multipliers is een van de belangrijkste technieken in de toegepaste wiskunde.

Ze verschijnt onder andere in:

- mechanica en variatierekening
- economie (optimalisatie onder budgetbeperkingen)
- machine learning (constraint optimalisatie)
- differentiaalmeetkunde

In veel toepassingen beschrijft de methode hoe een systeem zich gedraagt wanneer het onderworpen is aan fysieke of geometrische beperkingen.

De Lagrange-multipliers vormen daarom een fundamentele brug tussen de differentiaalrekening en de theorie van geconstrueerde optimalisatieproblemen.