

Een diepgaande uitleg van de D'Alembert-operator

Van de trillende snaar naar golven in ruimte-tijd

Jeroen Vermeulen

Inhoudsopgave

1	Inleiding: waarom de D'Alembert-operator belangrijk is	2
2	De 1D-golfvergelijking als vertrekpunt	2
2.1	Een snaar als fysisch model	2
2.2	Van Newton naar de snaarvergelijking	3
2.3	De 1D D'Alembert-vorm	4
2.4	Visuele interpretatie: tijdskromming versus ruimtekromming	4
2.5	D'Alemberts oplossing in 1D	5
3	Van 1D naar 3D plus tijd	5
3.1	De uitbreiding van x naar (x, y, z)	5
3.2	De 3D-golfvergelijking	6
3.3	Visueel: van snaar naar veld	6
3.4	De operator als verschil tussen tijd en ruimte	6
4	Relativistische formulering	7
4.1	Ruimtetijdcoördinaten	7
4.2	Covariante en contravariante afgeleiden	7
4.3	Lorentz-invariantie	7
5	Wiskundige werking van de operator	8
5.1	Werking op een algemeen veld	8
5.2	Werking op vlakke golven	8
5.3	Werking op sferische golven	8
6	Waar verschijnt de D'Alembert-operator in de fysica?	9
6.1	Akoestiek en mechanische golven	9
6.2	Elektromagnetisme	9
6.3	De Klein-Gordonvergelijking	9
6.4	Algemene relativiteit en gekromde ruimtetijd	9
6.5	Lineaire gravitatiegolven	10
7	De D'Alembert-operator en causaliteit	10
8	Veelvoorkomende tekenconventies	10
8.1	Mostly minus	10
8.2	Mostly plus	10
9	Oefeningen met uitgewerkte oplossingen	11
10	Samenvatting	14

1 Inleiding: waarom de D'Alembert-operator belangrijk is

De D'Alembert-operator is een van de centrale differentiaaloperatoren in de theoretische fysica. Hij verschijnt overal waar golven, velden, relativistische dynamica en causale voortplanting een rol spelen. In zijn meest vertrouwde vorm is hij de operator die in de golfvergelijking optreedt:

$$\square\phi = 0. \tag{1}$$

Hier is ϕ een veld. Dat veld kan bijvoorbeeld een uitwijking van een snaar zijn, een elektrisch potentiaal, een component van het elektromagnetisch veld, een scalaire kwantumveldvariabele of een kleine verstoring van de ruimtetijd zelf. Concreet: bij een snaar is ϕ de verplaatsing van de snaar; bij elektrisch potentiaal de lokale spanning; bij een elektromagnetische component bijvoorbeeld E_x of B_y ; bij een scalair kwantumveld een enkel getal per ruimtetijdpunt; en bij een ruimtetijdverstoring een kleine afwijking $h_{\mu\nu}$ van de vlakke metriek. Symbolen: E_x is de x -component van het elektrisch veld, B_y de y -component van het magnetisch veld, en $h_{\mu\nu}$ de kleine metrische verstoringstensor met indices $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Het fundamentele idee is verrassend eenvoudig: de D'Alembert-operator vergelijkt de kromming van een veld in de tijd met de kromming van datzelfde veld in de ruimte. Een golf ontstaat wanneer deze twee soorten kromming op een precieze manier in balans zijn. In één ruimtelijke dimensie is dat het bekende principe van een snaartrilling. In drie ruimtelijke dimensies plus tijd wordt dezelfde structuur de operator

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{2}$$

of, afhankelijk van de metrische conventie,

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Beide conventies komen voor. In dit document gebruiken we hoofdzakelijk de conventie

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2. \tag{4}$$

Deze keuze correspondeert met de Minkowski-metriek

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{5}$$

Voor de duidelijkheid leggen we hier nog even uit wat de Minkowski-metriek betekent. In speciale relativiteit is de ruimtetijd niet gewoon een vierdimensionale uitbreiding van de driedimensionale ruimte, maar heeft hij een specifieke geometrische structuur. De metriek $\eta_{\mu\nu}$ bepaalt hoe afstanden en tijdsintervallen worden gemeten in deze ruimtetijd. De diagonaalstructuur met één positieve en drie negatieve tekens geeft aan dat tijd een andere aard heeft dan ruimte. Dit is de wiskundige basis voor het onderscheid tussen tijdachtige, lichtachtige en ruimtelijke intervallen, en voor het bestaan van lichtkegels.

Mocht je niet (meer) weten wat ∇ is, daar kan je op de website <https://www.physics-i-love.be/wiskunde-artikelen/de-nabla-of-del-operator-uitleg-oefeningen> een aparte uitleg over vinden.

2 De 1D-golfvergelijking als vertrekpunt

2.1 Een snaar als fysisch model

Beschouw een gespannen snaar langs de x -as. De functie $u(x, t)$ geeft de verticale uitwijking van de snaar op positie x en tijdstip t . De snaar heeft spankracht T en massadichtheid per

lengte-eenheid μ . Voor kleine uitwijkingen is de beweging van de snaar beschreven door

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6)$$

waarbij

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7)$$

de golfsnelheid is.

Deze vergelijking zegt dat de versnelling van een klein snaarelement bepaald wordt door de ruimtelijke kromming van de snaar. Waar de snaar sterk gekromd is, ontstaat een terugdrijvende kracht. De tweede tijdsafgeleide meet de dynamische respons; de tweede ruimtelijke afgeleide meet de lokale kromming.

2.2 Van Newton naar de snaarvergelijking

Neem een klein snaarelement tussen x en $x + \Delta x$. De horizontale component van de spankracht blijft bij benadering constant, terwijl de verticale component verandert door de helling van de snaar. Voor kleine hellingen geldt

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8)$$

De netto verticale kracht op het snaarelement is dan ongeveer

$$F_y \approx T \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]. \quad (9)$$

Voor kleine Δx wordt dit

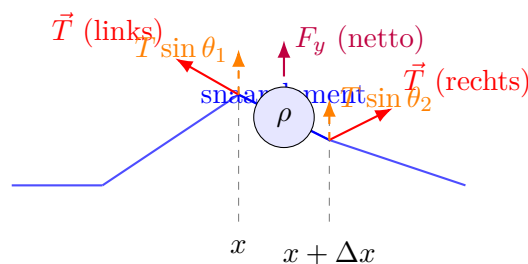
$$F_y \approx T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x. \quad (10)$$

De massa van het element is $\mu \Delta x$, dus Newtons tweede wet geeft

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x. \quad (11)$$

Na delen door $\mu \Delta x$ volgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (12)$$



Deze schets toont hoe de spankrachten aan beide uiteinden van het snaarelement beide verticale componenten hebben. Omdat de snaar ter hoogte van het element gekromd is (de helling verandert van θ_1 naar θ_2), is de rechtse spankracht minder steil dan de linkse. Dit geeft netto een verticale kracht F_y die het element versnelt.

Samenvatting in woorden voor de duidelijkheid: Vergelijkingen 8 tot en met 12 vormen de kern van de afleiding van de snaarvergelijking. We beginnen met de kleine-hoekbenadering (vgl. 8), bepalen daarmee de verticale spankracht (vgl. 9 en 10), passen Newtons tweede wet toe (vgl. 11, waarin $F = ma$ zegt dat kracht gelijk is aan massa maal versnelling), en eindigen met de klassieke golfvergelijking (vgl. 12). De sleutelstap is inzien dat de versnelling van elk snaarelement evenredig is met de lokale kromming, die wordt gemeten door de tweede ruimtelijke afgeleide.

2.3 De 1D D'Alembert-vorm

De snaarvergelijking kan herschreven worden als

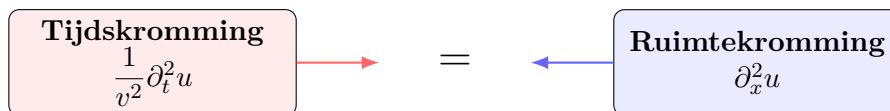
$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (13)$$

Dit is de D'Alembert-vorm in één ruimtelijke dimensie:

$$\square_{1+1} u = \left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 \right) u = 0. \quad (14)$$

De notatie $1 + 1$ betekent: één tijdsdimensie plus één ruimtelijke dimensie.

Samenvatting in woorden: Vergelijking 13 zegt: de tijdkromming van het veld (hoe snel de vorm verandert in de tijd) is gelijk aan de ruimtekromming (hoe sterk het veld gebogen is in de ruimte), geschaald met de golfsnelheid v^2 . Vergelijking 14 herschrijft dit compacter als $\square_{1+1} u = 0$: de D'Alembert-operator toegepast op het veld is nul, wat precies de golfbeweging beschrijft. De operator combineert de twee soorten kromming in één uitdrukking: tijdkromming minus ruimtekromming.



Een golf bestaat precies wanneer tijdkromming en ruimtekromming in evenwicht zijn: $\square_{1+1} u = 0$.

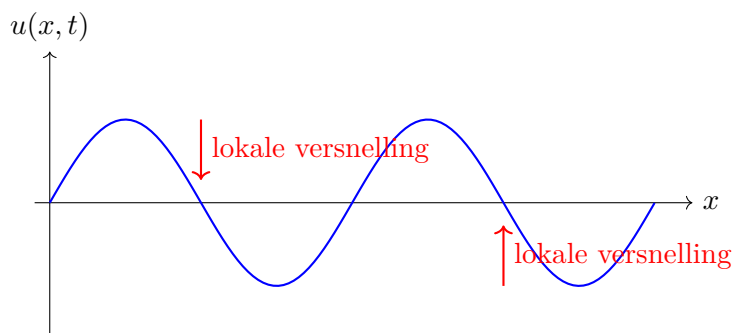
2.4 Visuele interpretatie: tijdkromming versus ruimtekromming

De vergelijking

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (15)$$

zegt dat de tijdkromming u_{tt} en de ruimtekromming u_{xx} niet onafhankelijk zijn. Ze moeten elkaar exact compenseren volgens

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}. \quad (16)$$



Profiel van een snaar op één tijdstip t

Een naar boven gebogen snaarsegment heeft een bepaalde kromming. Door de spankracht ontstaat een versnelling die de vorm laat voortbewegen. De golfvergelijking is dus geen abstracte formule, maar een lokale balanswet: de vorm van de snaar bepaalt haar eigen tijdsevolutie.

2.5 D'Alemberts oplossing in 1D

Een bijzonder diepe eigenschap van de 1D-golfvergelijking is dat de algemene oplossing geschreven kan worden als

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt). \quad (17)$$

Hier stelt $f(x - vt)$ een golf voor die naar rechts beweegt met snelheid v , terwijl $g(x + vt)$ een golf voorstelt die naar links beweegt met snelheid v .

Controleer dit voor $f(x - vt)$. Stel

$$\xi = x - vt. \quad (18)$$

Dan is

$$\partial_x f(\xi) = f'(\xi), \quad \partial_x^2 f(\xi) = f''(\xi), \quad (19)$$

terwijl

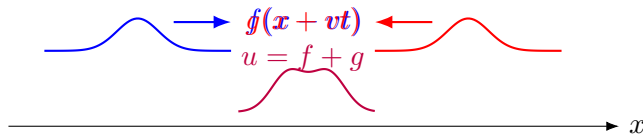
$$\partial_t f(\xi) = -v f'(\xi), \quad \partial_t^2 f(\xi) = v^2 f''(\xi). \quad (20)$$

Daarom geldt

$$\frac{1}{v^2} \partial_t^2 f(\xi) - \partial_x^2 f(\xi) = f''(\xi) - f''(\xi) = 0. \quad (21)$$

Dus elke vorm f die onvervormd naar rechts beweegt met snelheid v is een oplossing. Dit is de kernintuïtie achter de D'Alembert-operator.

Samenvatting in woorden: Vergelijkingen 17 tot en met 21 tonen stap voor stap waarom een lopende golfvorm een oplossing is. Eerst schrijven we de algemene oplossing als som van een rechts- en linkslopende golf (vgl. 17), daarna voeren we voor de rechterlopende term de variabele $\xi = x - vt$ in (vgl. 18) en berekenen we de afgeleiden naar ruimte en tijd (vgl. 19 en 20). In de laatste stap vallen de twee termen in de D'Alembert-operator precies tegen elkaar weg (vgl. 21), zodat de golfvergelijking voldaan is.



Mini-visueel: twee tegengesteld lopende componenten vormen samen de algemene oplossing.

3 Van 1D naar 3D plus tijd

3.1 De uitbreiding van x naar (x, y, z)

In één ruimtelijke dimensie meet de operator ∂_x^2 de kromming langs de x -as. In drie ruimtelijke dimensies kan een veld kromming hebben in drie onafhankelijke richtingen. Daarom vervangen we

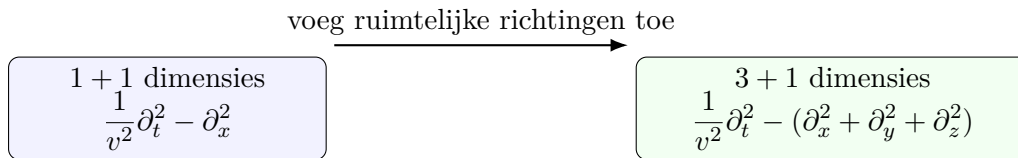
$$\partial_x^2 \quad (22)$$

door de Laplace-operator

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (23)$$

De overgang is dus structureel zeer eenvoudig:

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 \longrightarrow \frac{1}{v^2} \partial_t^2 - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2).} \quad (24)$$



De tijdskrumming blijft dezelfde soort term;
alleen de ruimtelijke kromming wordt uitgebreid.

3.2 De 3D-golfvergelijking

Voor een veld $\phi(x, y, z, t)$ wordt de golfvergelijking

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (25)$$

Met de Laplace-operator schrijft men dit compacter als

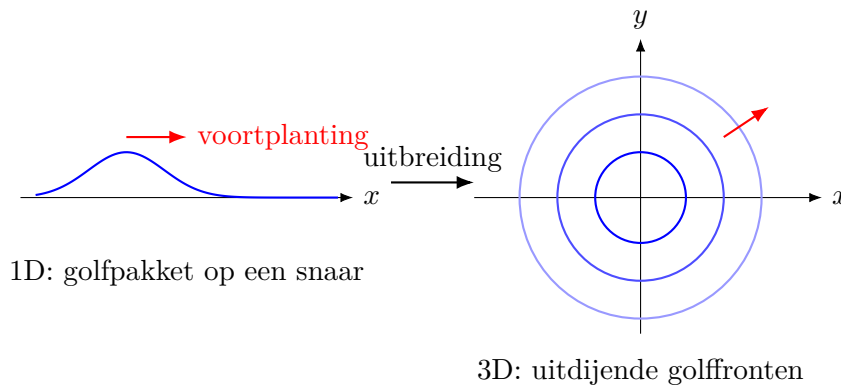
$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \phi = 0. \quad (26)$$

Wanneer $v = c$, de lichtsnelheid, spreken we van de relativistische D'Alembert-operator:

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2. \quad (27)$$

3.3 Visueel: van snaar naar veld

Een snaar is een eendimensionaal object met een uitwijking. Een veld in drie dimensies geeft op elk punt van de ruimte een waarde. De 1D-snaarvergelijking beschrijft hoe een profiel langs een lijn zich voortplant. De 3D-golfvergelijking beschrijft hoe een verstoring door de ruimte loopt, bijvoorbeeld als een sferische golf.



3.4 De operator als verschil tussen tijd en ruimte

De D'Alembert-operator is geen gewone vierdimensionale Laplace-operator. In Euclidische ruimte zou een vierdimensionale Laplace-operator de vorm hebben

$$\partial_w^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (28)$$

Maar in de relativistische fysica heeft tijd een ander teken dan ruimte. Daardoor verschijnt

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2. \quad (29)$$

Dat minteken is geen detail. Het is de wiskundige kern van causaliteit, lichtkegels en golfvoortplanting.

4 Relativistische formulering

4.1 Ruimtetijdcoördinaten

In speciale relativiteit combineert men tijd en ruimte tot ruimtetijdcoördinaten

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \quad (30)$$

De index μ loopt van 0 tot 3. De nulde component is tijdachtig, de andere drie zijn ruimtelijk.

Met de metriek

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (31)$$

is het ruimtetijdinterval

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (32)$$

4.2 Covariante en contravariante afgeleiden

Definieer

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (33)$$

Omdat $x^0 = ct$, geldt

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (34)$$

Verder is

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z \right). \quad (35)$$

Met de metriek verhogen we de index:

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right). \quad (36)$$

Daarom wordt

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2. \quad (37)$$

Dus

$$\boxed{\square = \partial_\mu \partial^\mu}. \quad (38)$$

Dit is de relativistisch covariante vorm van de D'Alembert-operator.

4.3 Lorentz-invariantie

Een van de belangrijkste redenen waarom de D'Alembert-operator zo fundamenteel is, is dat hij invariant is onder Lorentztransformaties. Dat betekent dat als twee inertiaalwaarnemers hun coördinaten verbinden via

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (39)$$

dan heeft de operator dezelfde vorm:

$$\square' = \square. \quad (40)$$

Fysisch betekent dit dat de golfvergelijking

$$\square\phi = 0 \quad (41)$$

dezelfde vorm heeft voor alle inertiaalwaarnemers. Dit is essentieel voor elektromagnetisme, relativistische veldentheorie en de Klein-Gordonvergelijking.

5 Wiskundige werking van de operator

5.1 Werking op een algemeen veld

Laat $\phi = \phi(x, y, z, t)$ een scalaire functie zijn. Dan is

$$\square\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (42)$$

De operator neemt dus vier tweede afgeleiden en combineert ze met Minkowski-tekenstructuur.

5.2 Werking op vlakke golven

Een zeer belangrijke testfunctie is de vlakke golf

$$\phi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \quad (43)$$

Hier is \mathbf{k} de golfvector en ω de hoekfrequentie. We berekenen

$$\partial_t^2 \phi = -\omega^2 \phi, \quad (44)$$

en

$$\nabla^2 \phi = -|\mathbf{k}|^2 \phi. \quad (45)$$

Daarom is

$$\square\phi = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2 \right) \phi. \quad (46)$$

De vergelijking $\square\phi = 0$ geeft dus

$$\boxed{\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2}. \quad (47)$$

Dit is de dispersierelatie van een massaloze golf, zoals licht in vacuüm.

5.3 Werking op sferische golven

In drie dimensies is een sferisch symmetrisch veld $\phi(r, t)$ afhankelijk van

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (48)$$

Voor zulke velden is de Laplace-operator

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (49)$$

De D'Alembert-operator wordt dan

$$\square\phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \partial_r^2 \phi - \frac{2}{r} \partial_r \phi. \quad (50)$$

Een uitgaande sferische golf heeft de vorm

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct). \quad (51)$$

De factor $1/r$ drukt uit dat de energie zich over steeds grotere boloppervlakken verspreidt.

6 Waar verschijnt de D'Alembert-operator in de fysica?

6.1 Akoestiek en mechanische golven

Voor geluidsgolven in een homogeen medium kan de drukverstoring $p(\mathbf{x}, t)$ voldoen aan

$$\frac{1}{v_s^2} \partial_t^2 p - \nabla^2 p = 0, \quad (52)$$

waarbij v_s de geluidssnelheid is. Dit is formeel dezelfde structuur als de snaarvergelijking, maar uitgebreid naar drie ruimtelijke dimensies.

6.2 Elektromagnetisme

In vacuüm voldoen de elektrische en magnetische velden aan golfvergelijkingen:

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0. \quad (53)$$

Deze vergelijkingen volgen uit de Maxwellvergelijkingen in vacuüm. In termen van de elektromagnetische vierpotentiaal

$$A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (54)$$

kan men in de Lorenz-ijk schrijven

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (55)$$

Met bronnen wordt de vergelijking

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu, \quad (56)$$

afhankelijk van tekenconventies soms met een minteken aan de rechterkant. Hier is J^μ de vierstroom.

6.3 De Klein-Gordonvergelijking

Voor een vrij relativistisch scalair veld met massa m verschijnt de D'Alembert-operator in de Klein-Gordonvergelijking:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0. \quad (57)$$

Deze vergelijking is de relativistische golfvergelijking voor spinloze deeltjes. De massaterm verandert de dispersierelatie naar

$$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}. \quad (58)$$

6.4 Algemene relativiteit en gekromde ruimtetijd

In gekromde ruimtetijd wordt de vlakke D'Alembert-operator vervangen door de covariante golfoperator, ook wel Laplace-Beltrami-operator of covariante d'Alembertiaan genoemd:

$$\square_g \phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \phi. \quad (59)$$

Voor een scalair veld kan dit geschreven worden als

$$\square_g \phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right), \quad (60)$$

waarbij $g = \det(g_{\mu\nu})$. In vlakke ruimtetijd reduceert dit tot de gewone D'Alembert-operator.

6.5 Lineaire gravitatiegolven

In de zwakke-veldbenadering van algemene relativiteit schrijft men de metriek als

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (61)$$

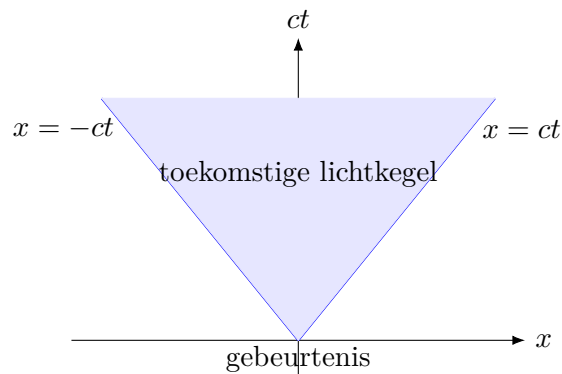
waarbij $h_{\mu\nu}$ een kleine verstoring is. In geschikte ijkcondities voldoen gravitatiegolven aan een vergelijking van de vorm

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (62)$$

Ook hier verschijnt dus hetzelfde principe: een veldverstoring plant zich voort als een golf in ruimtetijd.

7 De D'Alembert-operator en causaliteit

De operator \square is hyperbolisch. Dit betekent dat hij een causale golfvoortplanting beschrijft. Signalen verspreiden zich niet onmiddellijk door de hele ruimte, maar langs karakteristieken. In relativistische theorieën zijn deze karakteristieken lichtkegels.



De eenvoudige 1D-oplossing $f(x - ct) + g(x + ct)$ laat dit al zien. Invloed beweegt langs lijnen $x \pm ct = \text{constant}$. In hogere dimensies worden deze lijnen lichtkegels.

8 Veelvoorkomende tekenconventies

Er bestaan twee populaire conventies.

8.1 Mostly minus

Bij

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (63)$$

gebruikt men vaak

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2. \quad (64)$$

8.2 Mostly plus

Bij

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (65)$$

krijgt men

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \nabla^2. \quad (66)$$

Beide conventies zijn correct zolang men consequent blijft. Het verschil is globaal een minteken.

9 Oefeningen met uitgewerkte oplossingen

Oefening 1: controleer een 1D lopende golf

Toon aan dat

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (67)$$

een oplossing is van

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (68)$$

als en slechts als $\omega^2 = v^2 k^2$.

Oplossing

We berekenen

$$u_{tt} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t), \quad (69)$$

en

$$u_{xx} = -k^2 A \cos(kx - \omega t). \quad (70)$$

Dus

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = \left(-\frac{\omega^2}{v^2} + k^2 \right) A \cos(kx - \omega t). \quad (71)$$

Dit is nul voor alle x en t als

$$-\frac{\omega^2}{v^2} + k^2 = 0. \quad (72)$$

Daaruit volgt

$$\boxed{\omega^2 = v^2 k^2}. \quad (73)$$

Oefening 2: werk de 3D D'Alembert-operator uit

Bereken $\square\phi$ voor

$$\phi(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (74)$$

Gebruik

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2. \quad (75)$$

Oplossing

We hebben

$$\partial_t^2 \phi = \partial_t^2 (-c^2 t^2) = -2c^2, \quad (76)$$

terwijl

$$\partial_x^2 \phi = 2, \quad \partial_y^2 \phi = 2, \quad \partial_z^2 \phi = 2. \quad (77)$$

Dus

$$\square\phi = \frac{1}{c^2} (-2c^2) - 2 - 2 - 2 = -8. \quad (78)$$

Daarom is

$$\boxed{\square\phi = -8}. \quad (79)$$

Oefening 3: vlakke golf in drie dimensies

Laat

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \quad (80)$$

Toon aan dat $\square\phi = 0$ leidt tot

$$\omega = c|\mathbf{k}|. \quad (81)$$

Oplossing

Voor de tijdsafgeleide geldt

$$\partial_t^2 \phi = -\omega^2 \phi. \quad (82)$$

Voor de ruimtelijke Laplace-operator geldt

$$\nabla^2 \phi = -|\mathbf{k}|^2 \phi. \quad (83)$$

Daarom

$$\square \phi = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2 \right) \phi. \quad (84)$$

Voor een niet-triviale golf is $\phi \neq 0$, dus

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2 = 0. \quad (85)$$

Hieruit volgt

$$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2. \quad (86)$$

Bij positieve frequentie:

$$\boxed{\omega = c|\mathbf{k}|}. \quad (87)$$

Oefening 4: sferische golf

Beschouw

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct). \quad (88)$$

Toon aan dat deze functie voor $r \neq 0$ voldoet aan

$$\square \phi = 0. \quad (89)$$

Gebruik

$$\square \phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \partial_r^2 \phi - \frac{2}{r} \partial_r \phi. \quad (90)$$

Oplossing

Stel

$$\xi = r - ct. \quad (91)$$

Dan is

$$\phi(r, t) = \frac{f(\xi)}{r}. \quad (92)$$

Voor de tijdsafgeleiden krijgen we

$$\partial_t \phi = -\frac{c}{r} f'(\xi), \quad (93)$$

en

$$\partial_t^2 \phi = \frac{c^2}{r} f''(\xi). \quad (94)$$

Dus

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi = \frac{1}{r} f''(\xi). \quad (95)$$

Voor de ruimtelijke afgeleide:

$$\partial_r \phi = \frac{f'(\xi)}{r} - \frac{f(\xi)}{r^2}. \quad (96)$$

Daarna

$$\partial_r^2 \phi = \frac{f''(\xi)}{r} - \frac{2f'(\xi)}{r^2} + \frac{2f(\xi)}{r^3}. \quad (97)$$

Ook

$$\frac{2}{r}\partial_r\phi = \frac{2f'(\xi)}{r^2} - \frac{2f(\xi)}{r^3}. \quad (98)$$

Daarom

$$\partial_r^2\phi + \frac{2}{r}\partial_r\phi = \left(\frac{f''}{r} - \frac{2f'}{r^2} + \frac{2f}{r^3}\right) + \left(\frac{2f'}{r^2} - \frac{2f}{r^3}\right) \quad (99)$$

$$= \frac{f''}{r}. \quad (100)$$

Dus

$$\square\phi = \frac{f''}{r} - \frac{f''}{r} = 0. \quad (101)$$

Hiermee is bewezen dat

$$\boxed{\phi(r, t) = \frac{1}{r}f(r - ct)} \quad (102)$$

een uitgaande sferische oplossing is voor $r \neq 0$.

Oefening 5: Klein-Gordon-dispersie

Neem de Klein-Gordonvergelijking

$$\left(\square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0. \quad (103)$$

Gebruik de vlakke golf

$$\phi = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \quad (104)$$

Leid de dispersierelatie af.

Oplossing

Uit oefening 3 weten we dat

$$\square\phi = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2\right)\phi. \quad (105)$$

Invullen geeft

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0. \quad (106)$$

Voor $\phi \neq 0$ volgt

$$\frac{\omega^2}{c^2} = |\mathbf{k}|^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}. \quad (107)$$

Dus

$$\boxed{\omega^2 = c^2|\mathbf{k}|^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}. \quad (108)$$

Vermenigvuldigen met \hbar^2 geeft

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2c^2|\mathbf{k}|^2 + m^2c^4. \quad (109)$$

Met $E = \hbar\omega$ en $p = \hbar|\mathbf{k}|$ volgt

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}. \quad (110)$$

Dit is precies de relativistische energie-impulsrelatie.

Oefening 6: overgang van de 1D-snaar naar de 3D D'Alembert-operator

Beschouw de 1D-golfvergelijking

$$\frac{1}{v^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0. \quad (111)$$

Veronderstel nu dat de golf zich niet alleen langs x , maar in de volledige ruimte kan voortplanten. Leid de overeenkomstige 3D-vergelijking af en geef aan wat verandert en wat hetzelfde blijft.

Oplossing

In 1D meet $\partial_x^2 u$ de ruimtelijke kromming in de enige beschikbare ruimtelijke richting. In 3D kan het veld kromming hebben langs x , y en z . Daarom vervangen we

$$\partial_x^2 \quad (112)$$

door

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (113)$$

De tijdsterm blijft structureel dezelfde:

$$\frac{1}{v^2} \partial_t^2. \quad (114)$$

De 3D-golfvergelijking wordt dus

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi = 0.} \quad (115)$$

Voor relativistische golven in vacuüm neemt men $v = c$, zodat

$$\boxed{\square \phi = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \phi = 0.} \quad (116)$$

Wat hetzelfde blijft: de operator vergelijkt tijds-kromming met ruimtekromming. Wat verandert: de ruimtekromming is niet langer één tweede afgeleide, maar de som van drie tweede afgeleiden.

10 Samenvatting

De D'Alembert-operator is de relativistische golfoperator. In één ruimtelijke dimensie verschijnt hij als

$$\square_{1+1} = \frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \partial_x^2. \quad (117)$$

In drie ruimtelijke dimensies wordt hij

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2. \quad (118)$$

De operator is fundamenteel omdat hij de balans uitdrukt tussen temporele en ruimtelijke kromming. In relativistische notatie wordt dit

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu. \quad (119)$$

Daarmee is hij Lorentz-invariant en dus natuurlijk geschikt voor theorieën waarin ruimte en tijd samen één ruimtetijd vormen.

Van snaartrilling tot elektromagnetische golven, van Klein-Gordonvelden tot gravitatiegolven: telkens komt hetzelfde onderliggende idee terug. Een golf is een veldconfiguratie waarvan de tijdsevolutie lokaal bepaald wordt door haar ruimtelijke kromming. De D'Alembert-operator is precies de wiskundige machine die deze relatie compact uitdrukt.