De nabla (del) operator ∇: werking, betekenis en toepassingen in de fysica

Jeroen Vermeulen

Doel van dit document

Dit document legt de nabla-operator ∇ diepgaand uit, met nadruk op:

- **Wat ∇ precies is** (een differentiaaloperator) en hoe ze werkt op verschillende objecten.
- **De drie kernbewerkingen** die eruit voortkomen: gradiënt, divergentie en rotatie (curl).
- **Fysische interpretaties** (flux, bronsterkte, werveling) en waar dit terugkomt in o.a. elektromagnetisme, vloeistoffen en golfvoortplanting.
- **Rekenen in verschillende coördinaten** (Cartesisch, cilinder, bol).
- **Oefeningen met uitgewerkte oplossingen**.

Inhoudsopgave

1 Wat is de nabla-operator? 3
- 1.1 Belangrijk: ∇ is geen gewone vector . . . 3
- 1.2 Waarop kan ∇ werken? . . . 3

2 De drie kernoperators uit ∇ 3
- 2.1 Gradiënt $\nabla\phi$ . . . 3
  - 2.1.1 Geometrische betekenis . . . 3
  - 2.1.2 Niveaumanifolds en orthogonaliteit . . . 4
  - 2.1.3 Fysische voorbeelden . . . 4
- 2.2 Divergentie $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . . . 4
  - 2.2.1 Lokale bronsterkte: flux per volume . . . 4
  - 2.2.2 Fysische interpretatie . . . 4
  - 2.2.3 Voorbeelden in fysica . . . 4
- 2.3 Rotatie (curl) $\nabla \times \mathbf{A}$ . . . 4
  - 2.3.1 Lokale circulatie: wervelsterkte . . . 5
  - 2.3.2 Fysische interpretatie . . . 5
  - 2.3.3 Voorbeelden . . . 5
- 2.4 Laplaciaan ∇^2 . . . 5
  - 2.4.1 Interpretatie (intuïtief) . . . 5
  - 2.4.2 Typische fysische vergelijkingen . . . 5

3 Productregels en nuttige vectoridentiteiten 5
- 3.1 Productregels . . . 5
- 3.2 Identiteiten (zeer belangrijk in fysica) . . . 6

4 Coördinatenstelsels: waarom ∇ ingewikkelder wordt **6**
4.1 Cilindrische coördinaten (r, φ, z) . . . 6
4.2 Bolcoördinaten (r, θ, φ) . . . 6

5 Waar komt ∇ overal terug in de fysica? **6**
5.1 Elektrostatica en potentiaaltheorie . . . 6
5.2 Maxwellvergelijkingen (differentiaalvorm) . . . 7
5.3 Continuïteit en behoudswetten . . . 7
5.4 Vloeistofdynamica (Navier–Stokes, schets) . . . 7
5.5 Diffusie en warmte . . . 7
5.6 Golven . . . 7

6 Oefeningen (met volledige uitwerkingen) **7**
6.1 Oefening 1: gradiënt en richting van snelste stijging . . . 8
6.2 Oefening 2: divergentie en bron/put interpretatie . . . 8
6.3 Oefening 3: curl en conservativiteit . . . 9
6.4 Oefening 4: Laplaciaan en harmonische functies . . . 9
6.5 Oefening 5: van integraal naar differentiaal (continuïteit) . . . 9
6.6 Oefening 6: overgang van Cartesische naar bolcoördinaten . . . 10

7 De "Nabla-piramide"(Hiërarchie van Velden) **12**
7.1 Uitgewerkt voorbeeld bij elke operator uit de tabel . . . 13

8 De Helmholtz-decompositien **13**

9 Samenvatting in 10 regels **14**

1 Wat is de nabla-operator?

De nabla-operator (ook *del*-operator) is een **vector-differentiaaloperator**. In Cartesische coördinaten (x, y, z) definiëren we

$$\nabla \;:=\; \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{1}$$

Hier zijn $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ de eenheidsvectoren, en $\frac{\partial}{\partial x}$ enz. partiële afgeleiden.

1.1 Belangrijk: ∇ is geen gewone vector

Hoewel ∇ er uitziet als een vector, is het **een operator** die pas betekenis krijgt wanneer ze op een veld werkt.

Je kan haar zien als:

- een **richting-gevoelige differentiatormachine**;
- een compact notatiesysteem dat meerdere afgeleiden bundelt;
- een object dat zich formeel als een vector gedraagt onder coördinatentransformaties, maar met differentiaaloperatoren als componenten.

1.2 Waarop kan ∇ werken?

∇ kan werken op:

- een **scalair veld** $\phi(\mathbf{r})$ (bv. temperatuur, potentiaal, dichtheid);
- een **vectorveld** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (bv. snelheidsveld, elektrisch veld);
- producten/combinaties van velden (waar dan productregels, kettingregels, enz. spelen).

2 De drie kernoperators uit ∇

Uit ∇ volgen drie fundamentele differentiaaloperatoren:

1. **Gradiënt:** $\nabla\phi$
2. **Divergentie:** $\nabla \cdot \mathbf{A}$
3. **Rotatie (curl):** $\nabla \times \mathbf{A}$

En daarnaast: de **Laplaciaan** ∇^2, die je kan zien als $\nabla \cdot \nabla$ toegepast op een scalair veld.

2.1 Gradiënt $\nabla\phi$

Laat $\phi(x, y, z)$ een scalair veld zijn. Dan

$$\nabla\phi = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{2}$$

2.1.1 Geometrische betekenis

$\nabla\phi$ wijst in de richting van de **steilste toename** van ϕ. De grootte $|\nabla\phi|$ is de **maximale stijgsnelheid per lengte-eenheid**.

Formeel: voor een kleine verplaatsing $d\mathbf{r}$ geldt

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}. \tag{3}$$

Dit is het **totale differentiaal** in vectorvorm: de gradiënt is de unieke vector die deze relatie voor alle $d\mathbf{r}$ vervult.

2.1.2 Niveaumanifolds en orthogonaliteit

Op een niveauoppervlak $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$ is $d\phi = 0$, dus

$$0 = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}. \tag{4}$$

Dat betekent: $\nabla\phi$ staat loodrecht op alle verplaatsingen $d\mathbf{r}$ die in het niveauoppervlak liggen.
$\Rightarrow \nabla\phi$ is **normaal** op het niveauoppervlak.

2.1.3 Fysische voorbeelden

- Elektrostatica: $\mathbf{E} = -\nabla V$ (elektrisch veld is minus gradiënt van potentiaal).
- Mechanica: $\mathbf{F} = -\nabla U$ (kracht uit potentiële energie).
- Diffusie: flux $\mathbf{J}$ is vaak proportioneel aan $-\nabla c$ (Fick).
- Warmtegeleiding: $\mathbf{q} = -k\nabla T$ (Fourier).

2.2 Divergentie $\nabla \cdot \mathbf{A}$

Laat $\mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$. Dan

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{5}$$

2.2.1 Lokale bronsterkte: flux per volume

Divergentie meet de **netto uitstroming** (flux naar buiten) per volume-eenheid in het limietgeval van een heel klein volume.

Heuristisch: neem een klein volume V rond punt $\mathbf{r}$, met gesloten oppervlak $S = \partial V$. Dan:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \tag{6}$$

Dit is de **differentiële vorm** van de Gauss-divergentiestelling.

2.2.2 Fysische interpretatie

- $\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$: punt gedraagt zich als **bron** (meer uitstroom dan instroom).
- $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$: **put** (sink).
- $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$: **solenoïdaal** veld (incompressibel/bronvrij in die regio).

2.2.3 Voorbeelden in fysica

- Elektromagnetisme: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ (ladingdichtheid is bron van $\mathbf{E}$).
- Magnetisme: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (geen magnetische monopolen).
- Vloeistoffen: continuïteit $\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0$. In incompressibele stroming (ρ constant): $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

2.3 Rotatie (curl) $\nabla \times \mathbf{A}$

In Cartesische coördinaten:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \tag{7}$$

2.3.1 Lokale circulatie: wervelsterkte

Curl meet de **circulatie per oppervlakte** in het limietgeval:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \tag{8}$$

waar S een klein oppervlakje is met normaal $\mathbf{n}$, en ∂S de randcurve.

Dit is de **differentiële vorm** van de Stokes-stelling.

2.3.2 Fysische interpretatie

- Curl nul: veld is **irrotationeel** (lokaal geen werveling).
- Curl niet nul: er is lokale **rotatie/werveling**.

2.3.3 Voorbeelden

- Elektrostatica: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (conservatief veld).
- Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$.
- Stromingsleer: vorticiteit $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$.

2.4 Laplaciaan ∇^2

De Laplaciaan op een scalair veld ϕ is:

$$\nabla^2 \phi \;=\; \nabla \cdot (\nabla \phi) \;=\; \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \tag{9}$$

2.4.1 Interpretatie (intuïtief)

$\nabla^2 \phi$ meet in zekere zin **hoeveel ϕ lokaal afwijkt van haar gemiddelde** in een kleine omgeving. In veel fysica verschijnt dit als **diffusie/spreiding/curvature-term**.

2.4.2 Typische fysische vergelijkingen

- Poisson: $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$.
- Laplace: $\nabla^2 V = 0$ (bronvrije regio).
- Warmtevergelijking: $\partial_t T = \alpha \nabla^2 T$.
- Golfvergelijking: $\partial_t^2 \psi = c^2 \nabla^2 \psi$.
- Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \partial_t \psi$.

3 Productregels en nuttige vectoridentiteiten

Omdat ∇ een differentiaaloperator is, gelden productregels. Laat ϕ scalair en $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vectorvelden zijn.

3.1 Productregels

$$\nabla(\phi\psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A}), \tag{11}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A}). \tag{12}$$

3.2 Identiteiten (zeer belangrijk in fysica)

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0} \qquad \text{(curl van gradiënt is nul)}, \tag{13}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \qquad \text{(div van curl is nul)}, \tag{14}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \tag{15}$$

Die laatste is cruciaal om golfvergelijkingen voor EM-velden af te leiden.

4 Coördinatenstelsels: waarom ∇ ingewikkelder wordt

In Cartesische coördinaten zijn basisvectoren constant. In kromlijnige coördinaten (cilindrisch, bol) hangen basisvectoren en lengteschalen af van de positie. Daarom verschijnen **schaalfactoren**.

4.1 Cilindrische coördinaten (r, φ, z)

$$\nabla \phi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{16}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{17}$$
$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \tag{18}$$

4.2 Bolcoördinaten (r, θ, φ)

$$\nabla \phi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}, \tag{19}$$
$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \tag{20}$$

Praktische tip

In fysica kies je coördinaten die de symmetrie volgen:

- puntlading / sferische massa $\to$ bolcoördinaten;
- oneindige draad / cilinder $\to$ cilindrisch;
- vlakke problemen $\to$ Cartesisch.

Dan worden ∇-bewerkingen vaak drastisch eenvoudiger.

5 Waar komt ∇ overal terug in de fysica?

Hier is het kernidee: ∇ vertaalt **lokale veranderingen** naar **globale wetten** via integraalstellingen.

5.1 Elektrostatica en potentiaaltheorie

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \tag{21}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V = -\rho / \varepsilon_0. \tag{22}$$

Interpretatie: ladingdichtheid ρ is bron van veldlijnen; potentiaal voldoet aan Poisson.

5.2 Maxwellvergelijkingen (differentiaalvorm)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \tag{23}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{24}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{25}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{26}$$

Met vectoridentiteiten kan je hieruit EM-golfvergelijkingen afleiden.

5.3 Continuïteit en behoudswetten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{27}$$

Dit is massabehoud: verandering in dichtheid in een volume = netto instroom.

5.4 Vloeistofdynamica (Navier–Stokes, schets)

Voor een Newtoniaanse vloeistof:

> Een **Newtoniaanse vloeistof** is een vloeistof waarbij de schuifspanning lineair evenredig is met de schuifsnelheid: $\tau = \mu\,\dot{\gamma}$. De viscositeit μ is (bij gegeven temperatuur en druk) ongeveer constant en hangt dus niet af van de vervormingssnelheid zelf. Voorbeelden zijn water, lucht en (bij benadering) lichte oliën.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}. \tag{28}$$

Hier zie je:

- $-\nabla p$: kracht door drukgradiënt;
- $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$: viscositeit/diffusie van impuls;
- $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$: convectieterm (niet-lineair).

5.5 Diffusie en warmte

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u. \tag{29}$$

∇^2 is de operator die ruimtelijke spreiding encodeert.

5.6 Golven

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi. \tag{30}$$

In 3D: de Laplaciaan bepaalt hoe kromming van ψ leidt tot versnelling in de tijd.

6 Oefeningen (met volledige uitwerkingen)

Notatie

We werken standaard in Cartesische coördinaten tenzij anders vermeld. Gebruik: $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

6.1 Oefening 1: gradiënt en richting van snelste stijging

Gegeven $\phi(x, y, z) = x^2 y + 3z$.

1. Bereken $\nabla\phi$.
2. Bepaal $\nabla\phi$ in het punt $(1, 2, -1)$.
3. Geef de eenheidsrichting van snelste stijging in dat punt.

Oplossing

1. $$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3.$$

   Dus
   $$\nabla\phi = (2xy)\boldsymbol{e}_x + (x^2)\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z.$$

2. In $(1, 2, -1)$:
   $$\nabla\phi(1, 2, -1) = (2 \cdot 1 \cdot 2)\boldsymbol{e}_x + (1^2)\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z = 4\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z.$$

3. De richting van snelste stijging is de genormaliseerde gradiënt:
   $$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{(4, 1, 3)}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{(4, 1, 3)}{\sqrt{26}}.$$

6.2 Oefening 2: divergentie en bron/put interpretatie

Beschouw $\mathbf{A}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$.

1. Bereken $\nabla \cdot \mathbf{A}$.
2. Interpreteer fysisch (bron/put?) in elk punt.
3. Bereken de flux door de bol $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en controleer met Gauss.

Oplossing

1. $$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

2. Divergentie is overal positief en constant: elk punt gedraagt zich als een *uniforme bron.*

3. Op de bol is $\mathbf{A} = \mathbf{r}$. De uitwendige normaal is $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/R$. Dus op het oppervlak:
   $$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{r^2}{R} = \frac{R^2}{R} = R.$$

   Flux:
   $$\Phi = \iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, dS = \iint R\, dS = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

   Gauss-controle:
   $$\Phi = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV = \iiint_V 3\, dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3.$$

   Consistent.

6.3 Oefening 3: curl en conservativiteit

Gegeven $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y,\, x,\, 0)$.

1. Bereken $\nabla \times \mathbf{F}$.
2. Is $\mathbf{F}$ conservatief in $\mathbb{R}^3$? Motiveer.
3. Bereken de circulatie $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ rond de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$ in het vlak $z = 0$ (tegenwijzerzin).

Oplossing

1. $$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\,\boldsymbol{e}_x - (0-0)\,\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z = (1-(-1))\boldsymbol{e}_z = 2\boldsymbol{e}_z.$$

2. Omdat $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, is $\mathbf{F}$ niet irrotationeel en dus niet conservatief (globaal) in $\mathbb{R}^3$.

3. Parameteriseer C: $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$. Dan $d\mathbf{l} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)\,dt = (-R\sin t, R\cos t, 0)\,dt$. En $\mathbf{F} = (-y, x, 0) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$. Dus:

   $$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (-R\sin t, R\cos t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)\,dt = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = R^2\,dt.$$

   Circulatie:

   $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} R^2\,dt = 2\pi R^2.$$

6.4 Oefening 4: Laplaciaan en harmonische functies

Laat $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$.

1. Bereken $\nabla^2\phi$.
2. Is ϕ harmonisch? (d.w.z. voldoet $\nabla^2\phi = 0$?)

Oplossing

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -4.$$

Dus

$$\nabla^2\phi = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Ja, ϕ is harmonisch.

6.5 Oefening 5: van integraal naar differentiaal (continuïteit)

Stel dat een hoeveelheid Q met dichtheid $\rho(\mathbf{r}, t)$ stroomt met flux $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$. Je weet dat voor elk vast volume V:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho\,dV = -\iint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

1. Gebruik de divergentietheorema om de rechterkant om te schrijven als een volume-integraal.
2. Leid af dat lokaal geldt: $\partial_t\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Oplossing

1. Divergentiestelling:
$$\iint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dV.$$
Dus:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho\, dV = -\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dV.$$

2. Breng alles samen:
$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV = 0.$$
Omdat dit voor *elk* volume V geldt, moet de integrand overal nul zijn:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

6.6 Oefening 6: overgang van Cartesische naar bolcoördinaten

Beschouw het scalair veld

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

1. Schrijf de Cartesische coördinaten (x, y, z) uit in functie van bolcoördinaten (r, θ, φ).

2. Druk vervolgens het veld $\phi(x, y, z)$ uit in bolcoördinaten.

3. Bereken de gradiënt $\nabla\phi$ in Cartesische coördinaten.

4. Bereken de gradiënt $\nabla\phi$ rechtstreeks in bolcoördinaten met de formule
$$\nabla\phi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}.$$

5. Toon aan dat beide resultaten fysisch equivalent zijn.

Oplossing

1. De relatie tussen Cartesische en bolcoördinaten is
$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$
waar
   - r de afstand tot de oorsprong is,
   - θ de poolhoek (hoek t.o.v. de z-as),
   - φ de azimutale hoek in het xy-vlak.

2. Substitueer in $\phi(x, y, z)$:

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2$$

$$= (r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi) + (r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi) + (r^2 \cos^2\theta)$$

Factoriseer r^2:

$$\phi = r^2(\sin^2\theta \cos^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta)$$

Gebruik

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

dus

$$\phi = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\phi = r^2$$

Het scalair veld hangt dus enkel af van r.

3. Gradiënt in Cartesische coördinaten:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z$$

Dus

$$\nabla\phi = (2x, 2y, 2z)$$

Of in vectorvorm

$$\nabla\phi = 2(x, y, z) = 2\mathbf{r}.$$

4. In bolcoördinaten hebben we

$$\phi = r^2$$

dus

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 2r$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$$

Invullen in de gradiëntformule:

$$\nabla\phi = \mathbf{e}_r(2r)$$

Dus

$$\nabla\phi = 2r\,\mathbf{e}_r.$$

5. Controle van de equivalentie

   De radiale eenheidsvector is

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Dus

$$\begin{aligned} 2r\,\mathbf{e}_r &= 2r\frac{\mathbf{r}}{r} \\ &= 2\mathbf{r} \end{aligned}$$

Dit is exact hetzelfde resultaat als in Cartesische coördinaten:

$$\nabla\phi = 2(x, y, z).$$

De resultaten zijn dus volledig consistent.

7 De "Nabla-piramide"(Hiërarchie van Velden)

Het is voor beginners vaak verwarrend welk type veld er in een operator gaat en wat eruit komt. Een kort overzichtje helpt:

Operator	Input	Output
∇	scalair veld ϕ	vector veld $\nabla\phi$ (gradiënt)
$\nabla\cdot$	vector veld $\mathbf{A}$	scalair veld $\nabla\cdot\mathbf{A}$ (divergentie)
$\nabla\times$	vector veld $\mathbf{A}$	vector veld $\nabla\times\mathbf{A}$ (curl)
∇^2	scalair veld ϕ	scalair veld $\nabla^2\phi$ (Laplaciaan)

7.1 Uitgewerkt voorbeeld bij elke operator uit de tabel

Van type veld naar concrete berekening

1) Gradiënt $\nabla\phi$: van scalair veld naar vectorveld
Neem
$$\phi(x,y,z) = x^2y + 2yz - z^2.$$
Dan
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 2z, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2y - 2z.$$
Dus
$$\nabla\phi = (2xy)\boldsymbol{e}_x + (x^2 + 2z)\boldsymbol{e}_y + (2y - 2z)\boldsymbol{e}_z.$$
In het punt $(1,-1,2)$:
$$\nabla\phi(1,-1,2) = (-2,5,-6).$$
Interpretatie: deze vector wijst in de richting van de snelste lokale toename van ϕ.

2) Divergentie $\nabla\cdot\mathbf{A}$: van vectorveld naar scalair veld
Neem
$$\mathbf{A}(x,y,z) = \big(x^2,\ xy,\ -2z\big).$$
Dan
$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} = 2x + x - 2 = 3x - 2.$$
In het vlak $x = 1$:
$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 1 > 0.$$
Interpretatie: lokaal gedraagt het veld zich daar als een bron (netto uitstroom).

3) Curl $\nabla\times\mathbf{A}$: van vectorveld naar vectorveld
Neem
$$\mathbf{A}(x,y,z) = (-y,\ x,\ 0).$$
Dan
$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\,\boldsymbol{e}_x - (0-0)\,\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z = 2\boldsymbol{e}_z.$$
Interpretatie: de werveling is constant en wijst overal langs de positieve z-as.

4) Laplaciaan $\nabla^2\phi$: van scalair veld naar scalair veld
Neem
$$\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2.$$
Dan
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 2 + 2 - 4 = 0.$$
Interpretatie: ϕ is harmonisch; er is lokaal geen netto bronterm in dit veld.

8 De Helmholtz-decompositien

Dit is een fundamenteel concept in de fysica dat direct aansluit op hoofdstuk 3.2 over identiteiten. Het stelt dat (onder milde voorwaarden) elk vectorveld A geschreven kan worden als de som van een irrotationeel deel (een gradiënt) en een solenoïdaal deel (een rotatie):

$$\mathbf{A} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{B},$$

Dit verklaart *waarom* we in de fysica zoveel belang hechten aan $\nabla \cdot A = 0$ (bronvrij) en $\nabla \times A = 0$ (conservatief) .

9 Samenvatting in 10 regels

Cheat sheet

- $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ (Cartesisch): vector-differentiaaloperator.
- $\nabla\phi$: gradiënt = richting en grootte van snelste stijging.
- $\nabla \cdot \mathbf{A}$: divergentie = netto flux naar buiten per volume (bron/put).
- $\nabla \times \mathbf{A}$: curl = circulatie/werveling per oppervlak.
- $\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi$: Laplaciaan = diffusie/curvature-operator.
- Gauss: $\iiint (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$.
- Stokes: $\iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$.
- $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.
- Maxwell, continuïteit, Navier–Stokes, diffusie en golven zijn doordrenkt van ∇.
- Kies coördinaten volgens symmetrie: dan wordt ∇ hanteerbaar.