

Path integralen op een praktische manier
(maximaal wiskundig rigoureuse benadering)

Jeroen Vermeulen

Inhoudsopgave

Voorwoord	iii
I Functionaalanalyse, maat-theorie en het probleem van $\mathcal{D}\phi$	1
1 Configuratieruimten, functionaalintegralen en cilindermaat	2
1.1 Motivatie: waarom $\int \mathcal{D}\phi$ geen Lebesgue-maat is	2
1.2 Cilinderfuncties en projectieve limieten	2
1.3 Minlos: Gaussiaanse maten op distributieruimten	3
1.4 Van formele naar rigoureuze notatie	3
2 Wienermaat en de Feynman–Kac formule	4
2.1 Wienermaat als padmaat	4
2.2 Feynman–Kac: Euclidische kwantummechanica	4
2.3 Semiklassieke limiet en grote-afwijkingen	4
II Euclidische vrije QFT, correlaties en reconstructie	5
3 Vrij scalaire Euclidische veldentheorie als Gaussiaanse maat	6
3.1 Testfuncties, distributies en covariantie	6
3.2 Schwingerfuncties (Euclidische correlaties)	6
3.3 Positiviteit en Osterwalder–Schrader axioma’s (overzicht)	6
4 Van Euclidisch naar Minkowski: analytische voortzetting en reconstructie (schets)	8
4.1 Kernidee	8
4.2 Waarom de Euclidische route essentieel is	8
III Interactie, diagrammen, regularisatie en renormalisatie	9
5 Interactie via Radon–Nikodym: ϕ^4 in Euclidische ruimte	10
5.1 Interactie als gewogen maat	10
5.2 Genererende functionaal en cumulanten	10
6 Feynmandiagrammen als moment-identiteiten van Gaussiaanse maten	11
6.1 Wick-theorema en grafen	11
6.2 Ultraviolet divergenties als korte-afstand singulariteiten	11

7	Regularisatie en renormalisatie: een maat-theoretisch perspectief	12
7.1	Cutoff, dimensionele regularisatie, Pauli–Villars	12
7.2	Renormalisatie als herparametrisatie	12
7.3	Callan–Symanzik en RG (schets)	12
IV	Fermionische integralen, gaugefixing en BRST	13
8	Grassmann-algebra en fermionische functionaalintegralen	14
8.1	Grassmann-variabelen	14
8.2	Berezin-integratie	14
8.3	Gaussiaanse fermionische integralen	14
9	Gaugevelden, Faddeev–Popov en BRST (rigoureuze kernideeën)	15
9.1	Redundantie en quotient	15
9.2	Faddeev–Popov (formeel, met rigoureuze waarschuwing)	15
9.3	BRST als cohomologie	15
V	Niet-perturbatieve methoden	16
10	Lattice-regularisatie als rigoureuze definitie van de maat	17
10.1	Eindige dimensie	17
10.2	Continuüm-limiet	17
11	Instantonen en semiklassieke expansies (schets met rigoureuze context)	18
11.1	Stationaire punten van de Euclidische actie	18
11.2	Functionele determinanten	18
VI	Appendices	19
A	Sobolev-ruimten, distributies en groene operatoren	20
A.1	Sobolev-ruimten	20
B	Gaussian measures: kernformules	21
	Literatuurnotities	22

Voorwoord

Deze tekst behandelt de padintegraalformulering met de nadruk op (i) een wiskundig consistente formulering waar mogelijk, (ii) expliciete bruggen naar de “werkformules” in QFT, en (iii) heldere aanduiding van waar fysische notatie een afkorting is van een onderliggende maat-theoretische constructie.

De centrale spanning is bekend: de formele maat $\mathcal{D}\phi$ op een oneindig-dimensionale functie-ruimte bestaat niet als een Lebesgue-maat, en toch leiden correct geïnterpreteerde limieten (Gaussian measures, Wienermaat, lattice-regularisatie, Osterwalder–Schrader reconstructie) tot een rigoureuze basis voor grote klassen van theorieën. Dit boek kiest daarom systematisch voor: *(a) definities via benaderingen (cylindrische sets, projectielimieten), (b) Euclidische formuleringen met positieve maat waar mogelijk, en (c) terugvertaling naar Minkowski via analytische voortzetting met expliciete voorwaarden.*

Deel I

Functionaalanalyse, maat-theorie en het probleem van $\mathcal{D}\phi$

Hoofdstuk 1

Configuratieruimten, functionaalintegralen en cilindermaat

1.1 Motivatie: waarom $\int \mathcal{D}\phi$ geen Lebesgue-maat is

In eindige dimensie bestaat een translatie-invariante Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^n$ en is Gaussiaanse integratie

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^T A x + J^T x} dx = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}J^T A^{-1} J}$$

een standaardresultaat voor symmetrisch positief-definiëte A . In oneindige dimensie faalt een analoog construct: er bestaat geen (niet-triviale) σ -finitie translatie-invariante maat op een separebele oneindig-dimensionale Banachruimte. Dit is een fundamenteel obstakel voor de naïeve notatie $\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$.

Toch bestaan er wél natuurlijke maten op functieruimten, met name Gaussiaanse maten (zoals de Wienermaat), die niet translatie-invariant zijn maar wel precies de objecten leveren die in Euclidische QFT nodig zijn.

1.2 Cilinderfuncties en projectieve limieten

Laat E een reële topologische vectorruimte zijn (bv. $E = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, getemperde distributies). Een *cilinderfunctie* is een functie $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ die afhangt van finitely many lineaire coördinaten:

$$F(\phi) = f(\ell_1(\phi), \dots, \ell_n(\phi)),$$

met $\ell_i \in E^*$ continu lineair en $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-meetbaar.

Definitie 1.1 (Cilindrische σ -algebra). De cilindrische σ -algebra Σ_{cyl} op E is de kleinste σ -algebra zodat alle evaluatiemappen $\phi \mapsto (\ell_1(\phi), \dots, \ell_n(\phi))$ meetbaar zijn voor elke eindige keuze van ℓ_i .

Definitie 1.2 (Cilindermaat). Een cilindermaat op E is een consistente familie van eindig-dimensionale verdelingen $\{\mu_{\ell_1, \dots, \ell_n}\}$ op $\mathbb{R}^n$ zodanig dat projecties compatibel zijn: als men een lineaire projectie $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ neemt die overeenkomt met het vergeten van sommige coördinaten, dan geldt $\mu_{\ell_1, \dots, \ell_m} = \mu_{\ell_1, \dots, \ell_n} \circ \pi^{-1}$.

Het bestaan van een echte maat op een geschikte Borel σ -algebra vereist bijkomende regulariteit (tightness). In de praktijk werkt men in QFT vaak met:

- een *lattice-regularisatie* die een echte eindige-dimensionale Lebesgue-maat definieert,
- een *continuüm-limiet* als zwakke limiet van waarschijnlijkheidsmaten,
- of een *Gaussiaanse maat* op een distributieruimte, gegarandeerd door het Minlos-theorema.

1.3 Minlos: Gaussiaanse maten op distributieruimten

Laat $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de Schwartz-ruimte zijn en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ haar duale. Een karakteristieke functionaal $C : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ is positief-definiet en continu. Dan:

Stelling 1.3 (Bochner–Minlos (schets)). *Als C continu en positief-definiet is met $C(0) = 1$, dan bestaat een unieke waarschijnlijkheidsmaat μ op $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ zodat*

$$C(f) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} e^{i\phi(f)} \mu(d\phi) \quad \text{voor alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

In Euclidische vrije scalaire veldentheorie kiest men

$$C(f) = \exp \left(-\frac{1}{2} \langle f, (-\Delta + m^2)^{-1} f \rangle \right),$$

wat een Gaussiaanse maat op $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definieert. Dit is de rigoureuze kern van de “vrije padintegraal”.

1.4 Van formele naar rigoureuze notatie

Wanneer fysici schrijven

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int \phi K \phi + \int J \phi},$$

bedoelen we rigoureus: een Gaussiaanse maat μ_K op een geschikte ruimte (meestal distributies) met covariantie K^{-1} , en de bronterm als exponentiële cilinderfunctie, mits J in de juiste testfunctieruimte ligt.

Opmerking 1.4. De Minkowski-factor e^{iS} produceert geen positieve maat en vereist analytische voortzetting of oscillatoire integralen. Daarom is de wiskundig nette route: eerst Euclidisch (e^{-S_E}), dan reconstructie/continuatie.

Hoofdstuk 2

Wienermaat en de Feynman–Kac formule

2.1 Wienermaat als padmaat

Laat $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ de ruimte van continue paden zijn met de supremumnorm. De Wienermaat $\mathbb{P}$ maakt van de coördinaatmap $B_t(\omega) = \omega(t)$ een Brownse beweging met $B_0 = 0$.

Definitie 2.1 (Brownse beweging). Een proces $(B_t)_{t \in [0, T]}$ is Brownse beweging als: (i) $B_0 = 0$ a.s., (ii) onafhankelijke incrementen, (iii) $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t - s)I)$ voor $0 \leq s < t$, (iv) continuïteit van paden.

2.2 Feynman–Kac: Euclidische kwantummechanica

Beschouw de Schrödinger-operator $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ op $L^2(\mathbb{R}^d)$ onder standaardvoorwaarden op V . Dan geldt voor geschikte f :

Stelling 2.2 (Feynman–Kac). Voor $t \geq 0$:

$$(e^{-tH}f)(x) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left(- \int_0^t V(B_s) \, ds \right) f(B_t) \right],$$

waar $\mathbb{E}_x$ verwachting is voor Brownse beweging gestart in x .

Opmerking 2.3. Dit is de rigoureuze versie van de (Euclidische) padintegraal voor kwantummechanica:

$$\int \exp \left(- \int_0^t \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right) \, ds \right) \mathcal{D}x$$

wordt vervangen door een verwachting t.o.v. Wienermaat, met de kinetische term geïncorporeerd in de maat.

2.3 Semiklassieke limiet en grote-afwijkingen

De limiet $\hbar \rightarrow 0$ correspondeert (na schaaltransformatie) met grote-afwijkingsprincipes (Freidlin–Wentzell), waarbij het actiefunctionaal het snelheidsfunctionaal vormt. Dit verbindt stationaire fase met probabilistische variatieprincipes.

Deel II

Euclidische vrije QFT, correlaties en reconstructie

Hoofdstuk 3

Vrij scalaire Euclidische veldentheorie als Gaussiaanse maat

3.1 Testfuncties, distributies en covariantie

Neem $d \geq 2$ en laat $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de Schwartz-ruimte zijn. Definieer de operator

$$K := -\Delta + m^2, \quad m > 0.$$

De inverse K^{-1} bestaat als continue operator op geschikte Sobolev-ruimten en induceert een bilineaire vorm

$$C(f, g) := \langle f, K^{-1}g \rangle.$$

Dit is symmetrisch en positief-definiet.

Definitie 3.1 (Vrije Euclidische veldmaat). De *vrije scalaire Euclidische veldmaat* μ_0 is de unieke Gaussiaanse waarschijnlijkheidsmaat op $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ met karakteristieke functionaal

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} e^{i\phi(f)} \mu_0(d\phi) = \exp\left(-\frac{1}{2}C(f, f)\right).$$

3.2 Schwingerfuncties (Euclidische correlaties)

Definitie 3.2 (Schwingerfuncties). Voor $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definieer

$$S_n(f_1, \dots, f_n) := \int \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) \mu_0(d\phi).$$

Voor de Gaussiaanse maat geldt Wick:

$$S_{2n}(f_1, \dots, f_{2n}) = \sum_{\text{pairings}} \prod_{(i,j)} C(f_i, f_j), \quad S_{2n+1} = 0.$$

3.3 Positiviteit en Osterwalder–Schrader axioma's (overzicht)

De OS-axioma's geven voorwaarden op Schwingerfuncties zodat ze afkomstig zijn van een Wightman-theorie na reconstructie. Cruciaal is *reflectiepositiviteit*.

Axioma 3.3 (Reflectiepositiviteit (schets)). Laat θ tijdreflectie zijn in Euclidische tijd $x_0 \mapsto -x_0$. Voor functies F afhankelijk van veldwaarden in $x_0 > 0$ geldt

$$\int \overline{F(\phi)} (F \circ \theta)(\phi) \mu(d\phi) \geq 0.$$

Opmerking 3.4. Voor het vrije veld kan men reflectiepositiviteit aantonen via de expliciete covariantie-kern en Fourier-analyse. Voor interactietheorieën is dit subtiel en vormt dit de kern van constructieve QFT.

Hoofdstuk 4

Van Euclidisch naar Minkowski: analytische voortzetting en reconstructie (schets)

4.1 Kernidee

In Minkowski beschrijven Wightman-functies W_n de vacuümverwachtingswaarden van tijdgeordende operatorproducten. De OS-theorie zegt: gegeven Schwingerfuncties S_n die OS-axioma's voldoen, bestaat er een Hilbertruimte, velden als operatorwaardige distributies, en Wightman-functies die via analytische voortzetting uit S_n volgen.

4.2 Waarom de Euclidische route essentieel is

De Minkowski “maat” $\exp(iS)\mathcal{D}\phi$ is oscillatoir en doorgaans niet als maat te interpreteren. De Euclidische factor $\exp(-S_E)$ definieert daarentegen een kansmaat (na normalisatie), waarna correlaties als echte integralen bestaan.

Deel III

Interactie, diagrammen, regularisatie en renormalisatie

Hoofdstuk 5

Interactie via Radon–Nikodym: ϕ^4 in Euclidische ruimte

5.1 Interactie als gewogen maat

Formeel:

$$\mu(\mathrm{d}\phi) \propto e^{-\int \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \mathrm{d}x} \mu_0(\mathrm{d}\phi).$$

Rigoreus: voor cutoff Λ (UV) en volume V (IR) definieer

$$\mu_{\Lambda,V}(\mathrm{d}\phi) = \frac{1}{Z_{\Lambda,V}} \exp\left(-\int_V \frac{\lambda}{4!} : \phi_{\Lambda}(x)^4 : \mathrm{d}x\right) \mu_{0,\Lambda}(\mathrm{d}\phi),$$

met een geschikte regularisatie ϕ_{Λ} en Wick-ordering $:\cdot\cdot:$.

Opmerking 5.1. Wick-ordering is geen cosmetiek: zonder normal ordering divergeert $\phi(x)^2$ al als random variabele onder μ_0 .

5.2 Genererende functionaal en cumulanten

Definieer voor bron J (testfunctie):

$$Z_{\Lambda,V}[J] := \int \exp\left(\int J\phi\right) \mu_{\Lambda,V}(\mathrm{d}\phi), \quad W_{\Lambda,V}[J] = \log Z_{\Lambda,V}[J].$$

Connected correlaties zijn functionele afgeleiden van W .

Hoofdstuk 6

Feynmandiagrammen als moment-identiteiten van Gaussiaanse maten

6.1 Wick-theorema en grafen

Voor de vrije maat μ_0 reduceert elke momentverwachting tot sommen over pairings. In aanwezigheid van een polynomiale interactie ontstaat een combinatoriek van contracties die netjes wordt geclassificeerd door grafen (Feynmandiagrammen). Wiskundig: dit zijn identiteiten in de algebra van cumulanten (linked cluster expansions).

6.2 Ultraviolet divergenties als korte-afstand singulariteiten

De covariantie-kern $C(x - y)$ is singulier voor $x \rightarrow y$ in $d \geq 2$. Diagrammen bevatten producten van zulke kernen geëvalueerd op samenvallende punten, wat UV-divergenties veroorzaakt. Daarom zijn regularisatie en renormalisatie noodzakelijk.

Hoofdstuk 7

Regularisatie en renormalisatie: een maat-theoretisch perspectief

7.1 Cutoff, dimensionele regularisatie, Pauli–Villars

In een rigoureuze constructie zijn cutoff-regularisaties (lattice of momentum cutoff) het meest natuurlijk: ze leveren echte eindige-dimensionale integralen. Dimensionele regularisatie is analytisch zeer efficiënt maar minder direct maat-theoretisch.

7.2 Renormalisatie als herparametrisatie

Renormalisatie herdefinieert de parameters zodat fysische observabelen eindig blijven bij verwijderen van de cutoff. Conceptueel: men bekijkt een familie van maatregelen μ_Λ en zoekt een flow in parameter-ruimte zodat correlaties convergeren.

7.3 Callan–Symanzik en RG (schets)

De renormalisatiegroep beschrijft hoe effectieve koppelingen veranderen met schaal. Rigoreus is dit verwant aan de theorie van schaaltransformaties op maatregelen (Wilsonian RG).

Deel IV

Fermionische integralen, gaugefixing en BRST

Hoofdstuk 8

Grassmann-algebra en fermionische functionaalintegralen

8.1 Grassmann-variabelen

Definitie 8.1 (Grassmann-algebra). Een Grassmann-algebra $\Lambda(\eta_1, \dots, \eta_n)$ is gegenereerd door anticommuterende generatoren: $\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i$, in het bijzonder $\eta_i^2 = 0$.

8.2 Berezin-integratie

Berezin-integratie is gedefinieerd door lineariteit en de regels

$$\int d\eta \, 1 = 0, \quad \int d\eta \, \eta = 1.$$

Voor meerdere variabelen bepaalt men de orde.

8.3 Gaussiaanse fermionische integralen

Voor een inverteerbare matrix A geldt

$$\int \prod_i d\bar{\eta}_i \, d\eta_i \exp \left(- \sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \right) = \det A.$$

Dit verklaart determinanten van Dirac-operatoren in effectieve acties.

Hoofdstuk 9

Gaugevelden, Faddeev–Popov en BRST (rigoureuze kernideeën)

9.1 Redundantie en quotient

Gauge-invariantie betekent dat de configuratieruimte een quotient is $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ (verbindingen modulo gaugegroep). Een naïeve integraal over $\mathcal{A}$ overcount.

9.2 Faddeev–Popov (formeel, met rigoureuze waarschuwing)

Men voegt een delta-functionaal voor gaugevoorwaarde $G(A) = 0$ in en de FP-determinant:

$$1 = \Delta_{FP}(A) \int_{\mathcal{G}} \delta(G(A^g)) \, dg.$$

In een lattice-formulering kan men gaugefixing vermijden of zorgvuldig implementeren.

9.3 BRST als cohomologie

BRST formaliseert gauge-invariantie via een nilpotente differentiaal s . Observabelen zijn cohomologieklassen van s .

Deel V

Niet-perturbatieve methoden

Hoofdstuk 10

Lattice-regularisatie als rigoureuze definitie van de maat

10.1 Eindige dimensie

Neem een rooster $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ eindig. Dan is $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ een vector in $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$ en

$$Z_\Lambda = \int_{\mathbb{R}^{|\Lambda|}} \exp(-S_\Lambda(\phi)) \prod_{x \in \Lambda} d\phi_x$$

is een echte Lebesgue-integraal. Correlaties zijn goed gedefinieerd.

10.2 Continuüm-limiet

De limiet roosterspatiëring $a \rightarrow 0$ en volume $\rightarrow \infty$ is het kernprobleem: men zoekt convergentie (in distributiezin) van Schwingerfuncties en verificatie van OS-axioma's.

Hoofdstuk 11

Instantonen en semiklassieke expansies (schets met rigoureuze context)

11.1 Stationaire punten van de Euclidische actie

Instantonen zijn niet-triviale oplossingen van de Euclidische veldvergelijkingen met eindige actie. Semiklassiek benadert men de maat nabij zulke configuraties via functionele determinanten.

11.2 Functionele determinanten

Determinanten van differentiaaloperatoren worden gedefinieerd via zeta-regularisatie of warmte-kernel methoden:

$$\log \det K = -\zeta'_K(0).$$

Dit is wiskundig consistent en sluit aan bij effectieve acties.

Deel VI

Appendices

Bijlage A

Sobolev-ruimten, distributies en groene operatoren

A.1 Sobolev-ruimten

Definieer $H^s(\mathbb{R}^d)$ via Fourier:

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 \, dk.$$

De operator $(-\Delta + m^2)^{-1}$ is goed gedefinieerd als begrensde operator tussen geschikte H^s -ruimten.

Bijlage B

Gaussian measures: kernformules

Voor een Gaussiaanse maat met covariantie C geldt voor geschikte J :

$$\mathbb{E} \left[e^{\phi(J)} \right] = \exp \left(\frac{1}{2} \langle J, C J \rangle \right),$$

en Wick-contracties volgen uit differentiëren naar J .

Literatuurnotities

Aanbevolen referenties (klassiek en constructief):

- Glimm & Jaffe — *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*.
- Simon — *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*.
- Rivasseau — *From Perturbative to Constructive Renormalization*.
- Osterwalder & Schrader — oorspronkelijke OS-artikels over Euclidische reconstructie.
- Itzykson & Zuber / Peskin & Schroeder — fysische QFT-werktaal (met minder rigor).